Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270370
Centre d'intérêt: 89

Polyèdres : rapport de recherche / par D. Lunkenbein, M. Allard, C. Goupille, P. Allard ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1980.
iii, 148 p. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 26)

En tête du titre: Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.
Bibliographie: p. 146-148.

Cote Dewey: 510.7/P782 Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Unité de formation *Diaporama *Matériel didactique *Concept *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de sujet: *Géométrie *Polyèdre *Unité d'enseignement

Rapport d'une recherche en enseignement portant sur la conception, la réalisation et l'expérimentation d'une unité d'enseignement sur le thème "Polyèdres" par le moyen d'un diaporama accompagné d'un matériel concret d'apprentissage. Les réflexions didactiques accompagnant et émanant de chacune des étapes de cette triple activité ont été élaborées puis organisées à partir d'un modèle de travail en vue d'un engagement dans un processus de rationalisation des interventions didactiques.

Le modèle de travail retenu comporte huit étapes pour la réalisation d'une unité: 1. thème de l'unité d'enseignement; 2. analyse mathématique; 3. profil d'un matériel concret d'apprentissage; 4. analyse psychologique et pédagogique; 5. profil d'une situation concrète d'apprentissage; 6. application expérimentale de la situation d'apprentissage; 8. résultats (partiels) de l'étude. L'expérimentation a été réalisée avec le concours d'une cinquantaine d'enfants de neuf à douze ans.

La problématique inhérente à la communication de concepts spatiaux a conduit, dans la présente unité, à explorer les possibilités de réalisation d'un matériel concret (blocs) ainsi que sa représentation sur diapositives. Les contraintes de la réalité scolaire ont imposé un compromis entre une incursion libre dans le domaine conceptuel, respectant en cela les capacités et le rythme des enfants, et une présentation doublée d'un contenu bien circonscrit mettant plutôt l'apprenant en situation de "récepteur".

Type de document: r
Notice(s) connexe(s): 8270369
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGEC
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270370

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Mars 1980 Rapport No 26

POLYEDRES

Rapport de recherche

par

D. Lunkenbein
H. Allard, C. Goupille, P. Allard

Faculté des sciences Département de mathématiques

E D U Q 8270370

SECTION ENSEIGNEMENT

Le concept de groupement de Jean Piaget comme outil de la rationalisation des interventions didactiques.

Mars 1980 Rapport No 26

POLYEDRES

Rapport de recherche

par
D. Lunkenbein
H. Allard, C. Goupille, P. Allard

Projet de recherche subventionné
par le programme FCAC
du Ministère de l'Education du Québec

TABLE DES MATIERES

		PAGE
INTRODUCTION		
1	THEME DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT	1
1.1	Problématique	1
1.2	Justification	1
1.3	Buts	2
2	ANALYSE MATHEMATIQUE DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT	3
2.1	Choix et détermination	3
2.2	Contenu	5
2.2.1	Propriétés topologiques et hexaèdres	5
2.2.2	Pyramides	11
2.2.3	Prismes	15
2.2.4	Polyèdres semi-réguliers	18
3	PROFIL DU MATERIEL D'APPRENTISSAGE	23
4	ANALYSE PSYCHO-PEDAGOGIQUE DE L'UNITE	26
4.1	Principes didactiques et stratégie d'intervention	26
4.2	L'enseignement et la réalité scolaire	32
4.3	Ambitions de l'unité	33
5	PROFIL D'UNE SITUATION CONCRETE D'APPRENTISSAGE	34
5.1	Rôle attribué aux éléments de l'unité	34
5.1.1	Le diaporama	34
5.1.2	Le matériel	37
5.1.3	Les fiches	38
5.1.3.1	Fiches d'exploration	39
5.1.3.2	Fiches de travail	40

5.1.4 Le cahier de construction 43
5.1.5 Le guide du maître 43
5.2 Description de la démarche retenue pour le diaporama 45
5.2.1 Leçon 1 47
5.2.2 Leçon 2 48
5.2.3 Leçon 3 49
5.2.4 Leçon 4 51

6 APPLICATION DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT 58
6.1 La clientèle 58
6.2 Les modalités d'utilisation 59
6.3 La démarche 60
6.4 Les interventions 64

7 RESULTATS D'APPLICATION DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT 66
7.1 Observations recueillies lors des applications non-formelles 67
7.2 Moyens d'évaluation: problématique et intentions 68
7.3 Résultats et commentaires 72
7.3.1 Discrimination globale 72
7.3.1.1 Question 1 72
7.3.1.2 Question 2 78
7.3.2 Comparaison de blocs 86
7.3.3 Représentation spatiale 103

8 APERCU SYNTHETIQUE DES RESULTATS ET PROSPECTIVES 108

ANNEXE 1: Développés planaires des polyèdres 117

ANNEXE 2: Appellations variées utilisées par les enfants pour décrire les blocs 131

ANNEXE 3: Questionnaires A et B 135

BIBLIOGRAPHIE 146

INTRODUCTION

Le présent travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche en enseignement et se distingue par là de la recherche en apprentissage comme telle. Les éléments constituant le noyau central de cette activité de recherche ont été la conception, la réalisation et l'expérimentation d'une unité d'enseignement sur le thème "Polyèdres" par le moyen d'un diaporama accompagné d'un matériel concret d'apprentissage. Les réflexions didactiques accompagnant et émanant de chacune des étapes de cette triple activité ont été élaborées puis organisées à partir d'un modèle de travail en vue d'un engagement dans un processus de rationalisation des interventions didactiques (Lunkenbein, D., 1979, p. 15). Ce modèle apparaît, dans sa plus simple représentation, à la figure 1 de la page suivante. "Les cases numérotées de un à sept inclusivement indiquent les étapes minimales à franchir dans la réalisation d'une unité, les flèches et leur composition - dans le sens de la transitivité - illustrent les différentes façons d'exécuter ces étapes; les lignes pointillées conduisent à un carrefour, l'analyse des résultats partiels - étape huit - mènent à des modifications constantes de l'une ou l'autre des étapes" (Aubin, L. Jutras, J. 1979, p. 6). Le caractère dynamique de ce schéma cyclique - des sous-cycles peuvent toujours être engendrés et cela en tout point du modèle - assure à l'unité une réalisation de plus en plus ajustée aux besoins et aux contraintes du milieu scolaire en même temps qu'aux ambitions didactiques que nous poursuivons.

Figure 1: Processus de rationalisation des interventions didactiques: un modèle de travail (Lunkenbein, D. 1979, p. 15).

Dans le présent rapport, les huit points traités, correspondent respectivement à chacune des huit étapes de ce schéma de travail. Le huitième chapitre, en l'occurrence, présente une esquisse des diverses pistes d'expansion, d'approfondissement ou de prolongement possibles de l'unité: ce sont celles qui se dessinent à ce moment précis de notre étude.

1 THEME DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT

1.1 Problématique

Au premier cycle de l'élémentaire, l'enseignement de la géométrie tri-dimensionnelle se limite à une exploration superficielle de quelques solides bien connus du monde le l'enfant.

Au deuxième cycle de l'élémentaire, alors que l'enfant pourrait pousser plus loin son apprentissage, il s'avère que l'exploitation du tri-dimensionnel, si elle n'est pas totalement négligée, est trop souvent réduite à l'étude de quelques polyèdres bien particuliers tel le cube. Cette carence est due au fait que, dans la plupart des écoles, les maîtres sont dépourvus de matériels adéquats pour un enseignement valable. En effet, les objets tri-dimensionnels qu'ils peuvent sous-tirer de leur environnement ne présentent pas un univers suffisamment structurable et riche à exploiter.

Il faut de plus admettre que, mathématiquement parlant, aucune analyse du thème "Polyèdres" n'a encore été élaborée, au Québec pour des fins d'enseignement au deuxième cycle de l'élémentaire.

1.2 Justification

Il nous a semblé opportun, pour obvier à ces difficultés et pour combler ces lacunes, de fournir aux maîtres de l'élémentaire un matériel qui soit un univers aussi complet que possible pour les buts que nous

poursuivons, en même temps qu'un univers facilement structurable dans les limites que nous nous imposons pour demeurer à la portée de l'enfant du 2ème cycle de l'élémentaire.

1.3 Buts

L'unité d'enseignement "POLYEDRES" poursuit comme but d'initier l'enfant du 2ème cycle de l'élémentaire à la géométrie de l'espace en le mettant en situation d'entrer en interaction avec un environnement géométrique tri-dimensionnel, de concevoir progressivement des notions mathématiques et finalement, de structurer cet environnement particulier. Par là, l'unité prétend contribuer au développement de la perception spatiale chez l'enfant et l'aider à se créer progressivement une image mentale du concept de polyèdre qui soit de plus en plus ajustée à la réalité perceptuelle. Les notions et sous-notions abordées dans cette unité fourniront à l'enfant une première "grammaire" d'un univers de Polyèdres qu'il pourra structurer de façon partielle d'abord puis, éventuellement, de manière plus complexe ou plus raffinée. Nous espérons de plus, que l'enfant parvienne à former un groupement d'inclusion simple à partir des liens qu'il découvrira lui-même entre les divers sous-concepts abordés.

2 ANALYSE MATHEMATIQUE DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT

2.1 Choix et détermination

Quant au choix et à la détermination du contenu mathématique de l'unité, nous nous sommes trouvés devant une alternative. D'une part, traiter le concept de Polyèdre et les sous-concepts qui s'y rattachent d'un point de vue rigoureusement mathématique, risquant de créer, par là, une unité d'enseignement très peu ajustée à la réalité scolaire. D'autre part, aborder l'étude des Polyèdres de façon plus naïve mais devoir nous heurter à la difficulté de formuler des définitions qui soient simples mais qui n'empêchent pas les développements et les raffinements ultérieurs. Par souci d'ajustement et de praticabilité, nous avons opté pour la deuxième possibilité, même si le défi était assez sérieux à relever.

En conséquence de ce choix, nous avons dû accéder à l'espace tri-dimensionnel et plus particulièrement, au monde des polyèdres, par les voies les plus communes, i.e. les plus traditionnellement connues dans l'enseignement au Québec. Les quatre sous-notions qui sous-tendent la charpente mathématique de l'unité sont:

a) les polyèdres à "n" faces,

b) les pyramides,

c) les prismes,

d) les polyèdres d'un certain, degré de régularité.

Dans cette même perspective, il nous a semblé opportun de restreindre notre étude aux polyèdres simples[1]. Par contre, nous avons jugé bon de considérer des polyèdres concaves.

Précisons également que, dans l'unité, un polyèdre est considéré comme un objet tri-dimensionnel qui emprisonne un espace et dont la frontière est entièrement constituée de parties planes appelées faces. La rencontre de deux faces est dite arête et le point de rencontre d'au moins trois arêtes est appelé sommet.

---

1. Un polyèdre est dit simple si la surface qu'il représente est simplement connexe.

2.2 Contenu

2.2.1 Propriétés topologiques et hexaèdres

Les polyèdres simples sont habituellement discriminés et classifiés selon leur nombre de faces. Ainsi parle-t-on de tétraèdres (4 faces), de pentaèdres (5 faces), d'hexaèdres (6 faces), d'octaèdres (8 faces), de dodécaèdres (12 faces) et d'icosaèdres (20 faces) etc., pour ne nommer que les plus familiers. Même si ce critère permet de partitionner l'univers des polyèdres simples en une multitude de classes, il ne discrimine qu'assez superficiellement, car il néglige des variations importantes. Ces variations deviennent évidentes si on considère une classe particulière, par exemple, celle des hexaèdres. Dans cette classe, on ne rencontre pas seulement des variations d'ordre projectif ou affine mais aussi des variations d'ordre topologique. Ces dernières concernent surtout le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le degré des sommets, c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui se rencontrent dans un sommet. Parmi les hexaèdres simples, on en trouve à 8 sommets et 12 arêtes (6, 8, 12), dont le représentant le plus connu est le cube, mais on y trouve aussi des hexaèdres à 5 sommets et à 9 arêtes (6, 5, 9), dont un représentant est illustré dans la figure ci-après.

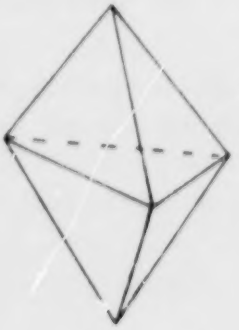


Figure 2. Exemple d'un hexaèdre du type (6, 5, 9)

Cette constatation nous incite à nous demander s'il n'y a pas d'autres types possibles d'hexaèdres. De plus et de façon plus générale, on s'interroge sur des relations qu'il peut y avoir entre le nombre de faces, le nombre sommets et le nombre d'arêtes d'un polyèdre simple.

D'abord, la formule d'EULER pour les polyèdres simples indique la relation générale qui relie le nombre F des faces, le nombre S de sommets et le nombre A d'arêtes:

(1) $\quad S - A + F = 2$

Considérons, ensuite, la somme des nombres d'arêtes délimitant chaque face. Cette somme Σ_f compte chaque arête exactement deux fois car toute arête est la rencontre d'exactement 2 faces, donc:

$$\Sigma_f = 2A;$$

mais puisque chaque face est délimitée par au moins 3 arêtes on a:

$$3 \times F \leq \Sigma_f .$$

Nous trouvons donc, en général, que

(2) $\quad 3 \times F \leq 2A$ pour tout polyèdre (simple)

et que le nombre minimal d'arêtes A_m de tout polyèdre simple en fonction du nombre de faces est

(3) $\quad A_m = \frac{3}{2} F$

De manière analogue, nous pouvons considérer la somme des degrés de chaque sommet. Cette somme Σ_s compte chaque arête exactement deux fois car toute arête relie exactement deux sommets, donc:

$$\Sigma_s = 2A \ ;$$

mais puisque chaque sommet est la rencontre d'au moins 3 arêtes, on a

$$3 \times S \leq \Sigma_s$$

Nous trouvons donc, en général, que

(4) $3 \times S \leq 2A$ pour tout polyèdre simple

et que le nombre maximal de sommets S_M de tout polyèdre simple en fonction du nombre d'arêtes est:

(5) $$S_M = \frac{2}{3} A$$

Ces considérations nous indiquent non seulement des relations générales entre F, S et A de polyèdres simples, mais elles nous montrent encore, et de façon exemplaire, les types possibles d'hexaèdres. A partir de (3) nous trouvons que pour tout hexaèdre simple, le nombre minimal d'arêtes est:

(*) $$A_m = \frac{3}{2} \times 6 = 9$$

et ainsi le type "minimal" d'hexaèdres est-il (6, 5, 9) car à l'aide de (1) nous établissons S_m à 5. - Le type "maximal" d'hexaèdres s'établit, à partir de (1) et de (5), à (6, 8, 12). Entre ces deux types extrêmes, on

trouve encore des représentants des types (6, 6, 10) et (6, 7, 11). Dans la classe des hexaèdres simples nous pouvons donc encore distinguer 4 sous-classes topologiques à l'aide des critères topologiques qui sont le nombre de sommets ou le nombre d'arêtes. Parmi ces 4 classes, c'est la classe "maximale" (6, 8, 12) qui nous est la plus familière. Elle contient les parallélépipèdes et les cubes et peut, pour cela, être appelée "la famille du cube".[1]

D'après la formule d'EULER, le nombre de faces d'un polyèdre simple est relié aux nombres S de sommets et A d'arêtes de la manière suivante:

$$F = 2 + A - S$$

En y considérant successivement les inégalités (4) et (2) on trouve:

$$F = 2 + A - S \overset{(4)}{\geq} 2 + A - \frac{2}{3} A = 2 + \frac{1}{3} A \overset{(2)}{\geq} 2 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} F\right) = 2 + \frac{1}{2} F$$

donc $F \geq 4$

pour tout polyèdre simple dont le degré minimal de chaque sommet est trois et dont chaque face a au moins trois arêtes. Le tétraèdre ($F = 4$) est donc le polyèdre simple "minimal".

---

1. Dans une unité d'enseignement intitulée "La famille du cube" nous étudions plus précisément cette classe d'hexaèdres. L'unité est disponible sous forme de diaporama, au Département de mathématiques, Section enseignement, de l'Université de Sherbrooke.

Ces quelques considérations, basées sur des observations directes de quelques polyèdres simples[1], permettent donc d'amorcer une structuration assez fine de cet univers de formes géométriques et de gagner progressivement un "insight" relativement profond des variations possibles de propriétés topologiques. Les degrés des sommets et les nombres d'arêtes qui délimitent les faces, seront deux autres critères à considérer dans ce contexte.

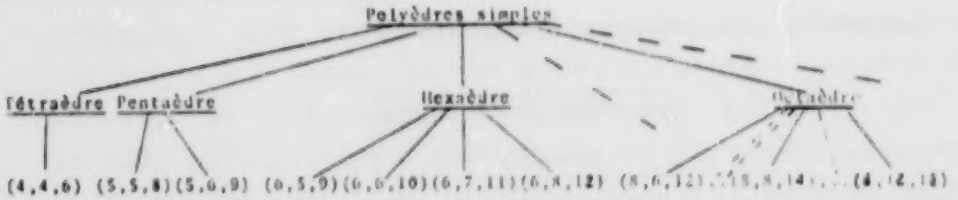


Figure 3: Amorce d'une structuration à l'aide de critères topologiques

Après l'étude des variations possibles d'ordre topologique, chacune des classes pourrait alors faire l'objet d'investigations concernant des variations possibles d'ordre projectif ou affine. Ceci a été fait, à titre d'exemple, dans le diaporama "La famille du cube" (voir l'annotation de la page 8) pour la classe d'hexaèdres (6, 8, 12).

Voici une brève amorce d'une structuration possible de cette classe. Les hexaèdres du type (6, 8, 12) sont

---

1. La formule d'EULER pour les polyèdres simples devrait éventuellement faire l'objet d'une unité d'enseignement séparée pour laquelle plusieurs alternatives peuvent être choisies.

caractérisés par le fait que toutes leurs faces sont des quadrilatères. De plus, ils peuvent être conçus comme étant des triplets de paires de faces opposées. Ces paires de faces opposées peuvent être parallèles ou non. Ainsi peut-on distinguer quatre classes d'hexaèdres du type (6, 8, 12) selon le nombre de paires de faces parallèles qu'ils possèdent (0, 1, 2 ou 3 paires de faces parallèles). En superposant à cette structuration la discrimination des hexaèdres du type (6, 8, 12) en prismes et non-prismes[1], on obtient les six différents types d'hexaèdres (6, 8, 12)[2] dont la figure ci-après illustre également les relations mutuelles.

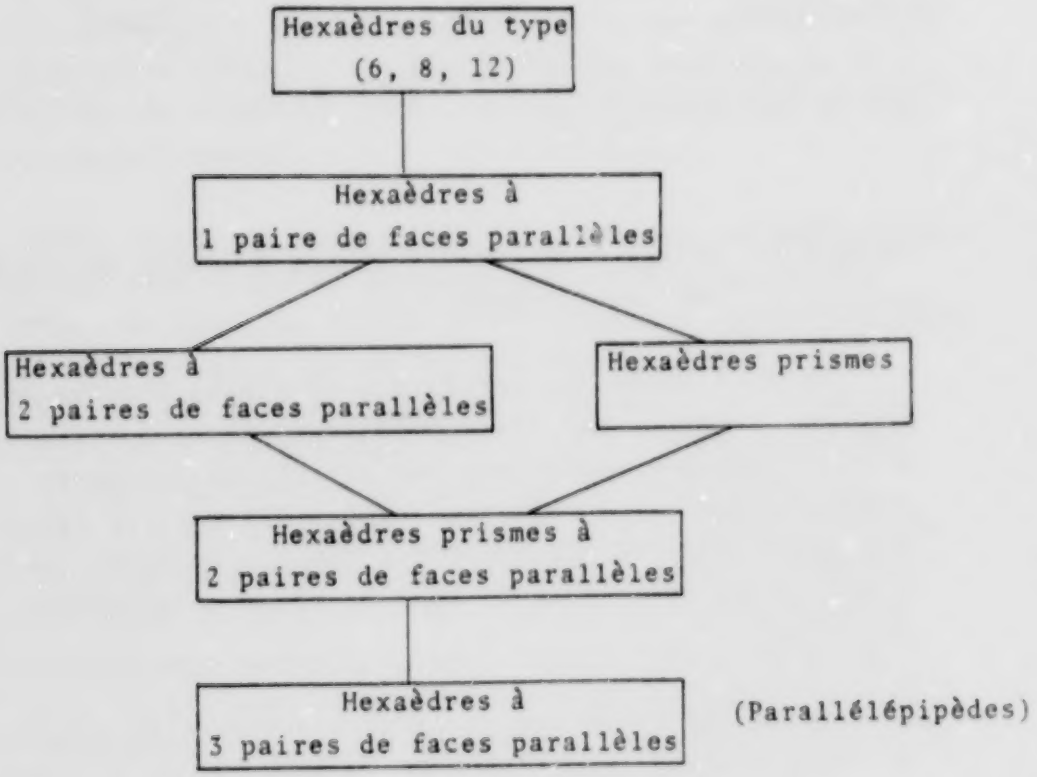


Figure 4: Structuration d'hexaèdres du type (6, 8, 12)

1. Pour la conception et la structuration du prisme voir 2.2.3.

2. Puisque tout prisme possède au moins une paire de faces parallèles, il n'existe pas de prismes parmi les

Dans la conception populaire et historique, des critères ou concepts plus globaux sont utilisés pour distinguer les polyèdres simples. Il nous semble opportun de préciser davantage ces concepts dans le cadre d'une unité d'introduction au niveau primaire que de proposer une étude systématique peu liée aux conceptions intuitives.

2.2.2 Pyramides

Parmi les notions intuitives, on trouve celle de pyramide. Elle est, dans la conception des enfants, très rattachée à l'image des pyramides d'Egypte. Le traitement scolaire de cette notion aura donc pour but principal la précision, l'approfondissement et la généralisation de la notion intuitive plutôt qu'une introduction entière à un concept nouveau.

Nous concevons une pyramide en tant que polyèdre simple dont une face (appelée la base) peut avoir des formes diverses et dont les autres faces (appelées faces latérales) sont des triangles qui se rencontrent tous en un seul sommet qui est appelé l'apex de la pyramide. Ce sommet particulier d'une pyramide est le seul sommet qui n'est pas situé à la base de la pyramide et, pour cela, on l'appelle aussi le sommet opposé à la base d'une pyramide. La forme de la pyramide est déterminée principalement par la forme de sa base. Ainsi parle-t-on de pyramides triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, etc., si la base de la pyramide est un triangle, un quadrilatère, un pentagone, etc., respectivement. Une pyramide, dont

---

(suite de l'annotation) hexaèdres à 0 paire de faces parallèles et puisque tout hexaèdre à 3 paires de faces parallèles est nécessairement un prisme, il n'existe pas de non-prismes parmi les hexaèdres à 3 paires de faces parallèles.

la base est un polygone à n côtés, est un polyèdre à $n + 1$ faces, à $n + 1$ sommets et à $2n$ arêtes, car toute pyramide possède, à part la base, autant de faces latérales que la base a de côtés; elle possède, à part l'apex, autant de sommets que la base et ses arêtes sont celles de la base doublée par celles qui relient la base et l'apex. Le degré de l'apex est égal au nombre de côtés de la base, tandis que les degrés des sommets à la base de la pyramide sont tous trois. La pyramide avec le plus petit nombre de faces est donc un tétraèdre car la base doit être au moins un triangle. Tous les types n-gonaux de pyramide sont faciles à concevoir étant tous du type $(n + 1, n + 1, 2n)$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$.

A part ces variations topologiques, une pyramide peut être convexe ou concave, ce qui dépend de la convexité de sa base. Ensuite on peut distinguer divers degrés de régularité de pyramides. Dans le cadre d'une introduction intuitive, nous suggérons les particularisations suivantes:

a) pyramides à base régulière: la face d'un polyèdre est dite régulière ssi elle est équiangle et équilatérale; une pyramide à base régulière est souvent appelée pyramide régulière; nous réservons cette appellation aux pyramides qui sont des polyèdres réguliers; une pyramide à base régulière est nécessairement convexe, car sa base est convexe;

b) pyramides à base régulière et droite: une pyramide à base régulière est dite droite ssi l'apex est situé perpendiculairement en dessus du "centre" de la base régulière ou encore ssi les faces latérales de la pyramide sont toutes des triangles isocèles; pour toute base régulière donnée, de telles pyramides existent et elles peuvent encore varier dans la hauteur de la pyramide;

c) pyramides à faces régulières: c'est-à-dire les pyramides dont toutes les faces sont des polygones réguliers; les faces latérales de telles pyramides doivent alors toutes être des triangles équilatéraux et on convient facilement que ces pyramides ne peuvent être que triangulaires, quadrangulaires ou pentagonales;

d) pyramides régulières: une pyramide est dite régulière ssi elle est un polyèdre régulier, c'est-à-dire ssi toutes ses faces sont régulières et tous ses sommets sont de même degré; d'après cette conception, seuls les tétraèdres réguliers sont des pyramides régulières et la seule variation possible est la grandeur de la pyramide.

Cette particularisation conceptuelle de la notion de pyramide est schématisée dans la figure 5 ci-après. Elle est un exemple par excellence de ce que Piaget appelle un groupement du type de "l'emboîtement hiérarchique de classes" (Piaget, 1967, page 50) et qui est plus précisément appelé "groupement logique d'inclusion" ou groupement booléen (Wittmann, 1973, page 128) car les différentes classes de pyramides et de polyèdres sont reliées entre elles par la relation d'inclusion.

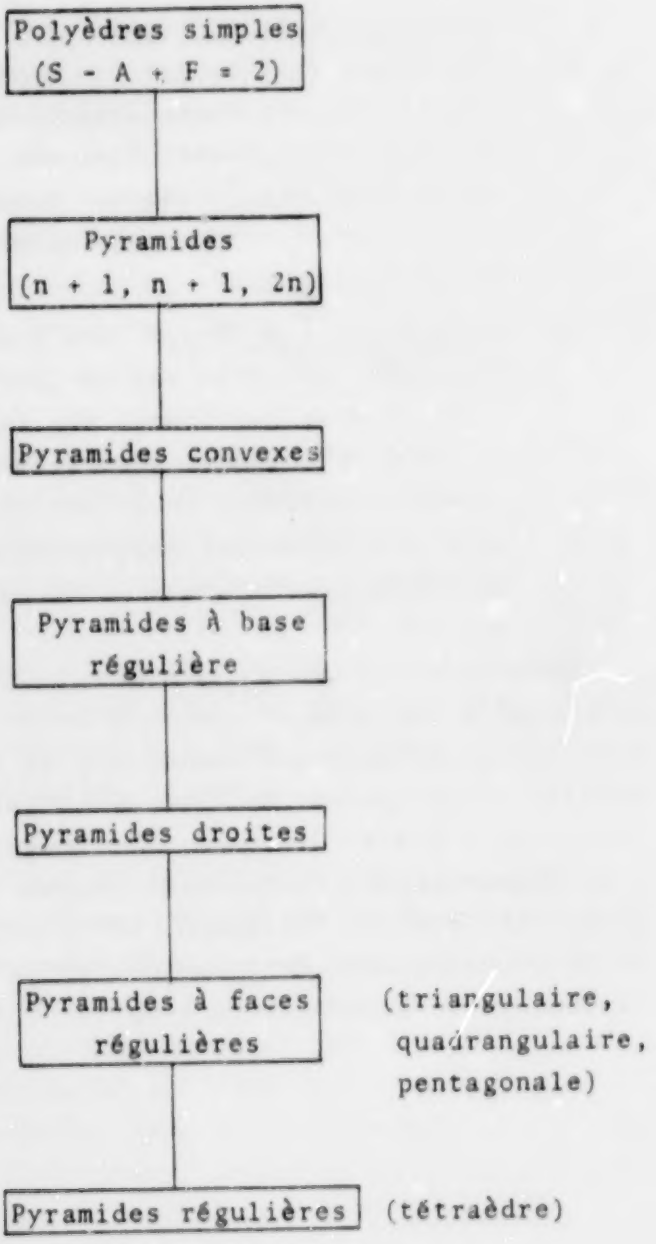


Figure 5: Particularisation de pyramides

2.2.3 Prismes

Au niveau primaire, la notion de prisme n'est souvent abordée que par des représentants très particuliers (prismes convexes, droits, triangulaires ou quadrangulaires) tel que son développement ne peut atteindre qu'un niveau relativement bas de généralité. Il nous semble alors opportun d'élargir cette notion à des représentants moins familiers tout en respectant le caractère d'une approche intuitive appropriée à ce niveau d'enseignement.

Ainsi, concevons-nous un prisme en tant que polyèdre simple possédant au moins une paire de faces parallèles - appelées les bases du prisme - lesquelles sont reliées, directement et uniquement, par une "ceinture" de parallélogrammes. Les faces de cette ceinture sont appelées les faces latérales du prisme. La notion de parallélisme (de faces et d'arêtes) intervient donc essentiellement dans la conception du prisme qui, pour cela, est un concept essentiellement affine.

Comme dans le cas de la pyramide, la forme d'un prisme est grandement influencée par la forme de ses bases. D'abord, les deux bases d'un prisme sont nécessairement congrues (même forme et même grandeur) car l'existence de la ceinture de parallélogrammes qui les relie indique une projection parallèle de l'une sur l'autre. Une telle projection conserve la forme et la grandeur puisque les deux bases sont parallèles. Selon la forme de ses bases, on parle de prismes triangulaires, quadrangulaires, pentagonales, etc. Tout prisme a autant de faces latérales que chacune des deux bases a de côtés. Le nombre de sommets d'un prisme est le double du nombre de côtés d'une base et le nombre d'arêtes est le triple du nombre de côtés d'une base. Ainsi peut-on dire qu'un prisme dont les

bases sont des polygones à n côtés est un polyèdre à $n + 2$ faces, à $2n$ sommets et à $3n$ arêtes, donc du type $(n + 2, 2n, 3n)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$ car toute face a au moins 3 côtés. De plus, chacun des sommets d'un prisme est de degré trois parce que tout sommet est situé à l'une ou l'autre des deux bases et relié, par des arêtes, à deux sommets de la même base et à un sommet de l'autre base.

Un prisme peut être convexe ou concave selon la convexité ou la concavité de ses bases. Un prisme est dit droit si toutes ses faces latérales sont des rectangles. Parmi les prismes convexes nous trouvons ceux dont les bases sont des polygones réguliers. Souvent, ces prismes sont déjà appelés des prismes réguliers. Nous réservons ce terme aux prismes qui sont des polyèdres réguliers.[1] Les prismes à bases régulières peuvent être droits ou non-droits. Cependant, les prismes dont toutes les faces sont régulières sont nécessairement droits car leurs faces latérales sont toutes des carrés. Ce dernier type de prisme est aussi dit prisme semi-régulier.[1] Les prismes réguliers ont la propriété additionnelle que toutes leurs faces sont congrues. Puisque les seuls parallélogrammes réguliers sont les carrés et puisque tout prisme possède des parallélogrammes comme faces latérales, les seuls prismes réguliers sont les cubes. Cette structuration de prismes est illustrée dans la figure 6 ci-après qui représente également un groupement logique d'inclusion.

---

1. Pour la conception de polyèdres semi-réguliers et réguliers, voir 2.2.4

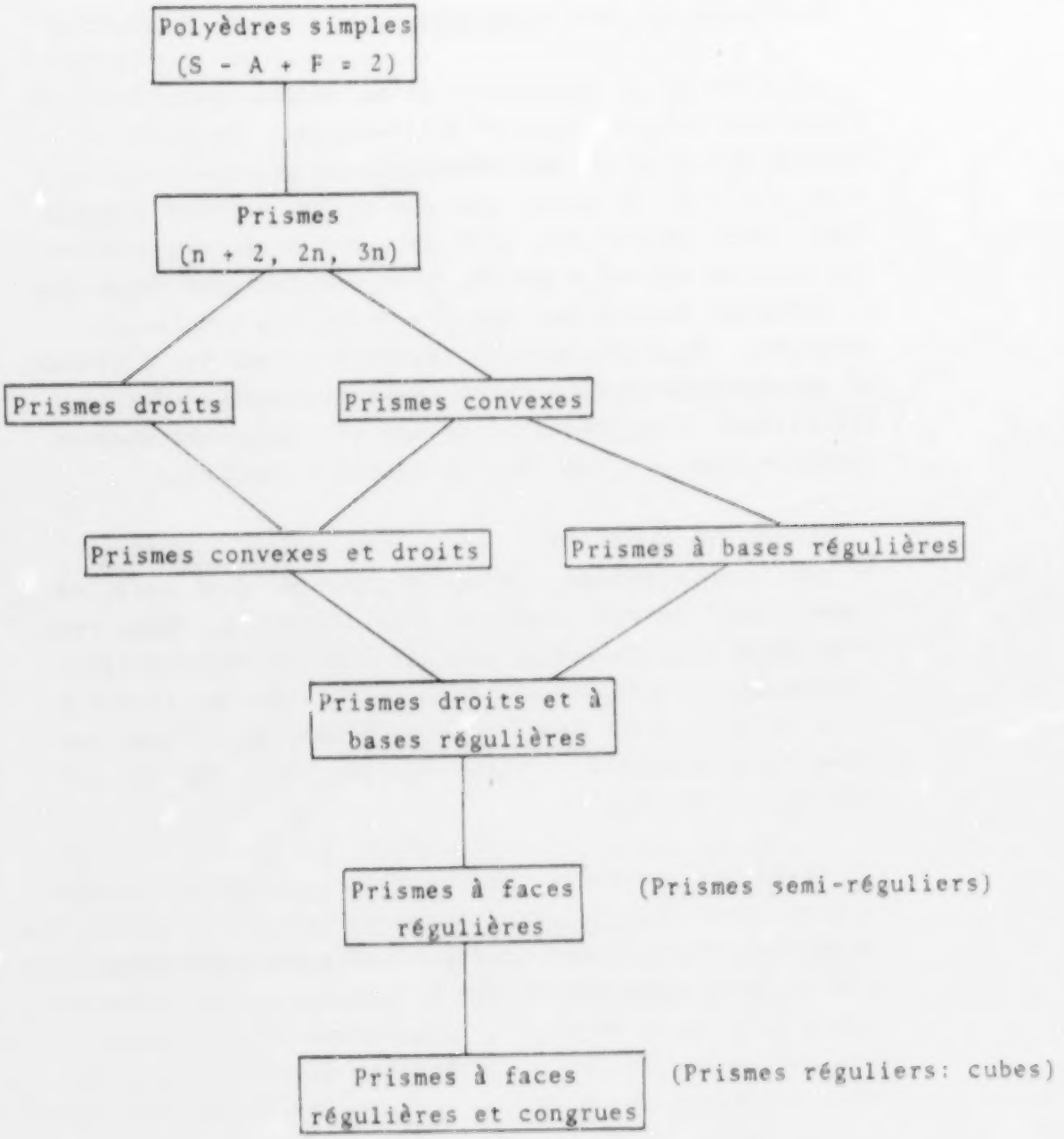


Figure 6: Structuration de prismes

2.2.4 Polyèdres semi-réguliers

L'étude de la régularité de polyèdres appartient aux thèmes les plus anciens en mathématique. Le sujet a fasciné beaucoup de mathématiciens de presque tous les temps et il a été abordé par une grande variété d'approches. Nous optons ici, dans le cadre d'une exploration initiale au niveau primaire, pour une approche intuitive et naïve ne considérant que des polyèdres simples et convexes. De plus, nous ne choisissons que des critères de discrimination facilement identifiables par des jeunes enfants. La précision de ces critères sera alors possible dans des approfondissements subséquents.

Ainsi concevons-nous les polyèdres semi-réguliers en tant que polyèdres simples et convexes dont tous les sommets sont de même degré et dont toutes les faces sont régulières. Cette conception est facilement accessible aux jeunes enfants et elle peut, par la suite, être précisée en remplaçant les "sommets de même degré" par les "sommets équivalents". (Voir HOLDEN, 1977, page 47 ou COXETER, 1973, page 5).

Parmi ces polyèdres semi-réguliers, nous identifions ceux qui sont réguliers par la propriété additionnelle que toutes les faces soient congrues. Ces polyèdres réguliers peuvent être caractérisés par le nombre p de côtés de chaque face et le nombre q d'arêtes à chaque sommet, donc par un couple (p, q) de nombres naturels. Les valeurs possibles de p et q peuvent être évaluées comme suit (COXETER, 1973, page 5): à chaque sommet du polyèdre il y a q faces régulières qui s'y rencontrent. Chaque face y touche avec un angle intérieur de $(1 - 2/p)\ 180^{\circ}$. Pour que ce sommet représente un angle

spatial il faut que la somme de ces angles soit plus petite que 360°, donc:

$$q\ (1 - \tfrac{2}{p})\ 180^{\circ} < 360^{\circ};$$

il s'ensuit que $1 - \frac{2}{p} < \frac{2}{q}$ ou $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$.

Cette inégalité s'exprime plus convenablement de la manière suivante:

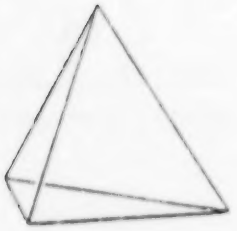
$$(p - 2)\ (q - 2) < 4$$

Puisque $p, q \in \mathbb{N}$ et le nombre minimal pour p et q est 3, il n'y a que les couples suivants qui remplissent les conditions de cette inégalité:

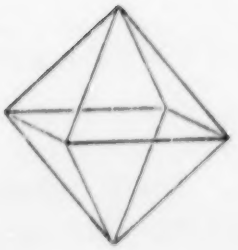
$$(3, 3),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (3, 5) \text{ et } (5, 3).$$

Pour chacun de ces couples, il existe un polyèdre régulier: ils sont dits les solides <u>platoniques</u>.

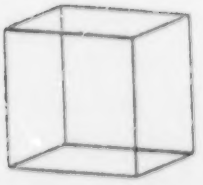
a) Tétraèdre régulier (3, 3)



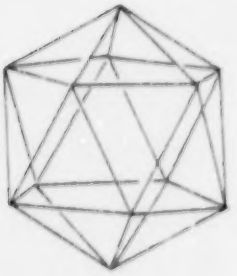
b) Octaèdre régulier (3, 4)



c) Cube (4, 3)



d) Icosaèdre régulier (3, 5)



e) Dodécaèdre régulier (5, 3)

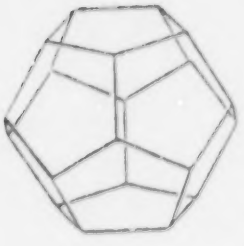


Figure 7: Solides platoniques

Ces cinq solides platoniques ne sont pas les seuls polyèdres semi-réguliers. Puisque les sommets de tout prisme sont de degré trois, tout prisme à faces régulières est un polyèdre semi-régulier. Parmi les polyèdres semi-réguliers, nous trouvons donc une classe infinie de prismes semi-réguliers dont les bases sont des polygones réguliers et dont les faces latérales sont des carrés.

Une autre classe infinie de polyèdres semi-réguliers est conçue si l'on relie deux polygones réguliers et congrus (bases), non pas par une ceinture de carrés, mais par une ceinture de triangles équilatéraux. Cette classe est celle des antiprismes semi-réguliers.

Les "solides archimédiens", finalement, figurent encore parmi les polyèdres semi-réguliers. Ils sont conçus par des troncatures convenables des solides platoniques (HOLDON, 1977, pages 46 à 52). Ils ne sont ni réguliers, possédant au moins deux différents types de faces, ni prismes et ni antiprismes, faisant alors partie du complément de ces trois classes.

Puisque les définitions de prisme et d'antiprisme s'excluent mutuellement, il n'y a pas de polyèdres qui soient à la fois prisme et antiprisme. Cependant, le cube et l'octaèdre régulier sont à la fois régulier et prisme ou régulier et antiprisme respectivement.

Nous illustrons la structuration que nous venons d'esquisser dans le schéma ci-après qui peut également être considéré comme celui d'un groupement logique d'inclusion. Une telle structuration peut, au besoin ou selon les capacités des enfants, être raffinée en y précisant les critères de discrimination, ou en y ajoutant de nouveaux

critères. C'est cette dernière façon qui nous a orientés dans la conception et la réalisation d'une exploration initiale du monde fascinant des polyèdres de divers degrés de régularité.

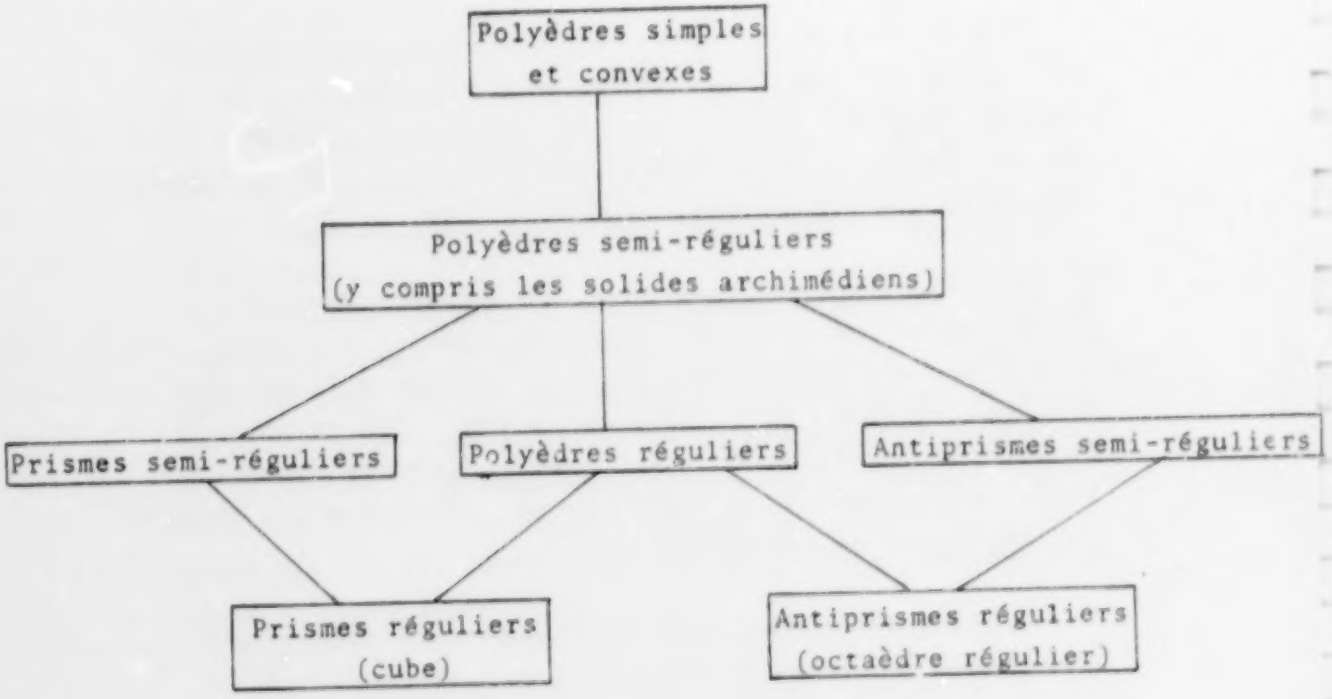


Figure 8: Structuration de polyèdres semi-réguliers

3 PROFIL DU MATERIEL D'APPRENTISSAGE

L'enseignement de la géométrie, surtout au niveau primaire, fait souvent appel à des explorations, des constructions et des analyses d'objets concrets. Le rôle d'un tel matériel concret est de stimuler l'imagination spatiale et de lui servir de support. On se sert également du matériel concret comme moyen de communication d'idées de structuration (propriétés de formes géométriques et leurs variations possibles) lesquelles pourraient être à l'origine de processus d'abstraction et de formation de concepts. Ainsi un matériel concret sert-il de support important pour le développement de l'imagination spatiale et de stimulus initial de processus mentaux tels que l'abstraction et la formation de concepts. Quoique important comme point de départ ou point de référence pour de tels processus, un matériel concret ne doit pas être confondu avec la réalité du scientifique des sciences de la nature. La géométrie n'est pas découverte à partir de la réalité, elle est une conception de l'espace et, comme toutes les disciplines mathématiques, indépendante de la réalité extérieure.

> "... this intuition (conception de l'espace) is not a 'reading' or apprehension of the properties of objects, it is very much something that is under our control. We do not 'discover' our geometries from without, we impose them from within."
>
> (D.G. Tahta and W.M. Brookes, 1966)

Ainsi, un matériel concret d'apprentissage - stimulus d'activités mentales initialement - devient-il, au cours de ces activités, une réalisation particulière de conceptions et de concepts que l'on imposera par la suite aux phénomènes (spatiaux) de la réalité. Les activités

mentales stimulées par un matériel concret (de l'enseignement de la mathématique) doivent aboutir à la conception d'objets mentaux et de structures abstraites libres de propriétés physiques. Cependant, dans ce contexte, nous traitons de processus organiques caractérisés par des facteurs de temps et de graduation. Des résultats instantanés ou des conceptions parfaites et finales ne peuvent pas être attendues. Mais des conceptions individuelles et variées dépendant des aptitudes et des expériences préalables des apprenants sont à prévoir et à encourager possiblement.

Le matériel concret que nous avons réalisé et dont nous nous servons dans la présente unité n'a pas seulement pour but de faciliter une première familiarisation avec les notions de polyèdre, de pyramide, de prisme et de polyèdre semi-régulier mais de servir encore de stimulus pour l'approfondissement de ces concepts. Ainsi la réalisation de ce matériel a-t-elle été guidée par les conditions suivantes:

1.- le matériel devrait suggérer une classification de polyèdres selon le nombre de faces; de plus, il devrait stimuler la conception d'autres classes topologiques telles qu'indiquées par la figure 3 de l'amorce de la structuration de polyèdres;

2.- le matériel devrait permettre de concevoir divers types d'hexaèdres dans la famille (6, 8, 12) comme le suggère, par exemple, la figure 4;

3.- il devrait également stimuler l'approfondissement de la notion de pyramide; par exemple, en considérant une particularisation indiquée dans la figure 5;

4.- la notion de prisme devrait également y trouver des réalisations avec des variations semblables à celles de la figure 6.

5.- finalement, le matériel devrait stimuler la conception de critères de régularité pouvant aboutir à une structuration semblable à celle de la figure 8.

Ainsi avons-nous conçu un matériel de 26 polyèdres, fabriqués dans du carton, comprenant au moins un représentant de chacune des classes des structurations des figures 3, 4, 5 et 7. Ce matériel comprend également quelques exemplaires pouvant servir d'exemples de structurations semblables à celles de la figure 3. Les dessins des développés planaires de ces polyèdres peuvent être retrouvés en annexe (1).

La présente unité d'introduction se place donc dans un contexte conceptuel décrit dans la figure ci-après où les thèmes touchés explicitement ont été hachurés.

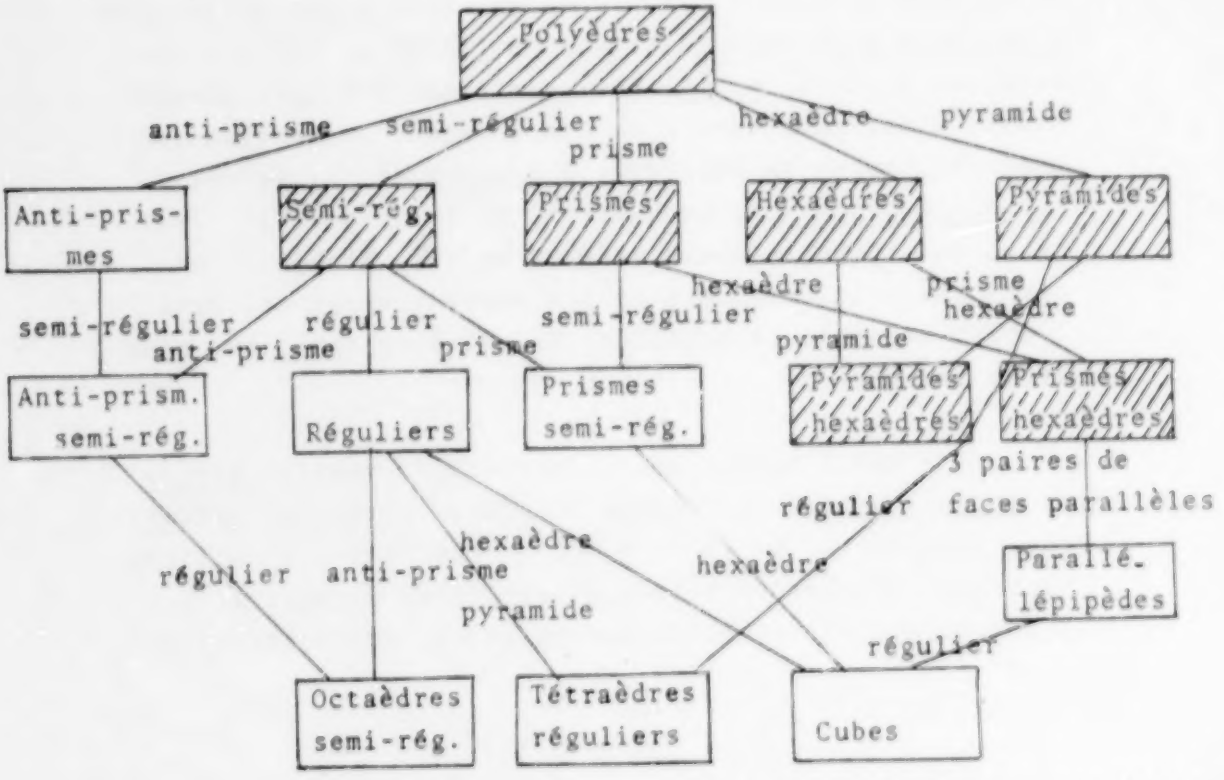


Figure 9: Schématisation globale de l'étude des polyèdres

4 ANALYSE PSYCHO-PEDAGOGIQUE DE L'UNITE

4.1 Principes didactiques et stratégie d'intervention

Vouloir réussir une unité d'enseignement, c'est consentir à maintenir une relation d'ajustement et d'interappellation réciproque entre le contenu disciplinaire de l'unité, d'une part, et la démarche à privilégier, les principes didactiques à appliquer, en même temps que les étapes naturelles du processus d'apprentissage, i.e. le modèle cognitif de l'enfant, d'autre part. Toutes ces données doivent, chacune pour sa part, en son temps et, à sa façon, s'imposer les unes aux autres dans un tout harmonieux et unifié.

Parce que nous sommes convaincus de la nécessité pour un individu (comme apprenant) d'agir, sur la réalité mathématique pour l'appréhender, nous avons privilégié l'approche génétique (Wittmann, E. 1978, p. 124 ou Lunkenbien, D. 1977, p. 58) pour notre unité d'enseignement. Ainsi, avons-nous tenu à ce que l'enfant se familiarise avec le concept de Polyèdres à travers et par le réel (principe génétique, Lunkenbein, D. 1979, p. 23). Pour cela, nous avons d'abord créé un univers d'objets concrets qui soit propice à ce dit apprentissage et, dans l'application de ce principe général d'orientation, nous avons voulu:

- que l'enfant soit confronté de manière active et intensive avec la réalité Polyèdres (principe dynamique, Lunkenbein, D. 1979, p. 23). Pour cela, nous l'avons impliqué dans des activités diversifiées d'exploration, à savoir, des activités de manipulation, de construction

et de représentation, l'incitant par là à cerner le réel par différentes voies d'approche;

- que l'enfant, à la suite d'activités d'exploration libre d'abord, puis guidée, en arrive progressivement à intérioriser ses actions concrètes (opérations mentales) pour ensuite les organiser en systèmes dynamiques appelés groupements (principe opératoire, Lunkenbein, D. 1979, p. 23). Pour favoriser un tel passage nous avons, par le biais d'un processus gradué de structuration, présenté à l'enfant des exercices de discrimination, de classification, de sériation et par là, d'abstraction et de généralisation. Voici le tableau à la fois schématique et dynamique de ce processus de structuration.

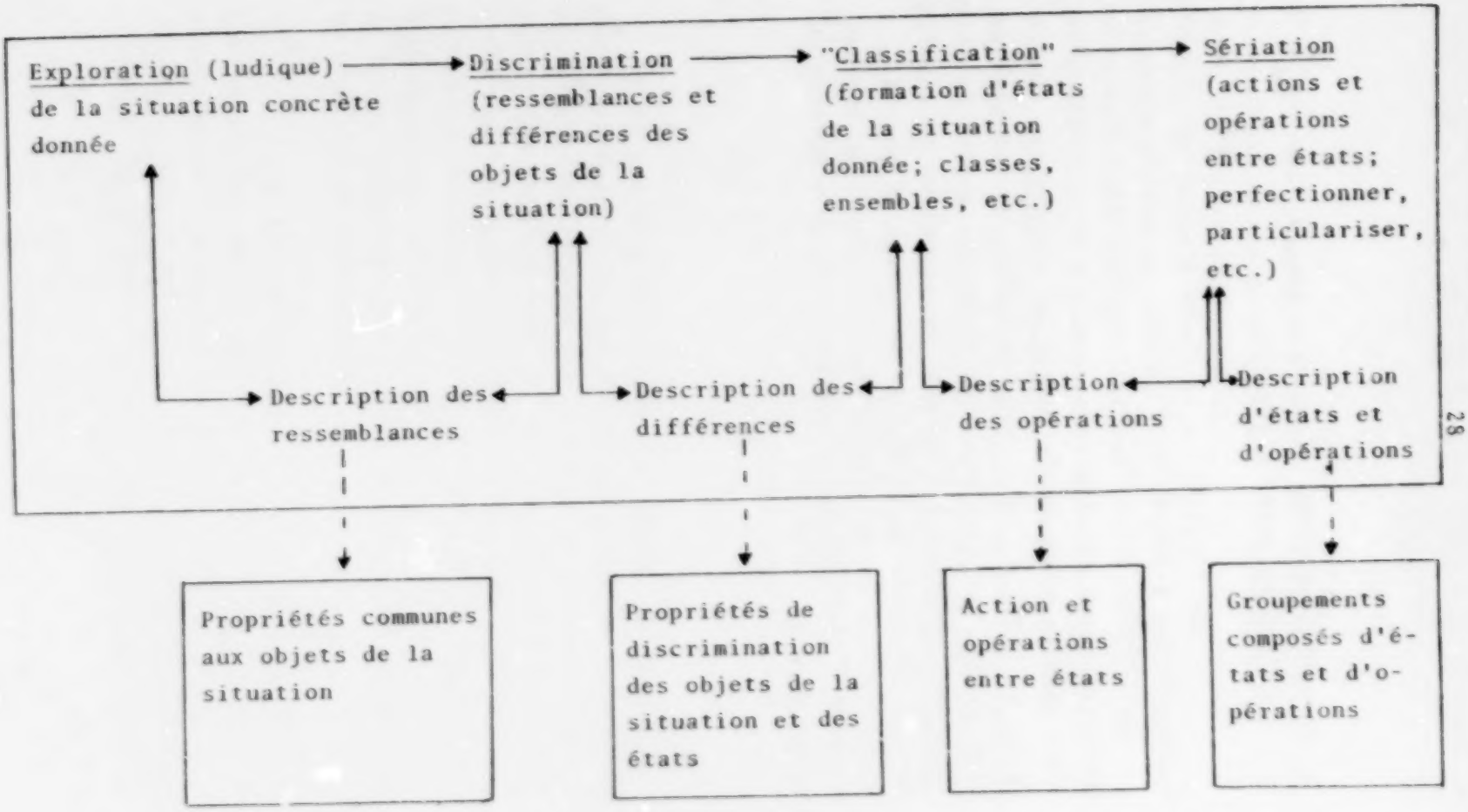


Figure 10: Stratégie d'intervention didactique en vue d'une structuration donnée (Lunkenbein, D., 1977, p. 286)

- que l'enfant, au cours des différentes étapes de ce processus de structuration, élabore lui-même un véritable réseau de relations:

  - relations entre les objets de l'univers des Polyèdres
  - relations entre ces objets et des objets déjà connus
  - relations entre les connaissances déjà acquises et les nouvelles notions géométriques abordées dans l'unité
  - relations entre deux ou plusieurs notions ou sous-notions proposées dans l'unité.
  - etc.

On reconnaît aisément que le concept de "relation" est omniprésent dans une telle stratégie de structuration. Les déductions simples que l'enfant réussira à faire à partir des relations qu'il découvre auront comme effet d'unifier bon nombre de notions acquises, d'assurer la cohérence du contenu conceptuel de l'unité (principe d'intégration, Lunkenbein, D. 1979, p. 23) et, par là, de faire soupçonner à l'enfant le dynamisme interne de ce treillis de relations;

- que l'enfant puisse, dans des étapes ultérieures de son apprentissage et en fonction de son développement mental, pousser plus loin l'étude et l'approfondissement du concept de polyèdres de même que des sous-concepts d'hexaèdres, de pyramides, de prismes et de

polyèdres semi-réguliers (principe de l'enseignement en spirale, Lunkenbein, D. 1979, p. 25). Pour cela, les définitions proposées dans l'unité sont formulées dans des termes exacts mais accessibles à l'enfant. Par exemple, dans la définition du prisme, l'utilisation de l'expression: "... reliées par une ceinture de parallélogrammes" qui figure à la place de l'expression: "... reliées uniquement et directement par des parallélogrammes", nous semble plus suggestive et par là, plus facile à comprendre pour l'enfant. Pourtant, cette concession littéraire n'altère en rien l'exactitude de la définition et n'empêchera pas que le développement du thème soit parachevé à un niveau supérieur (principe de la continuation, Lunkenbein, D. 1977a, p. 43).

- que l'enfant développe une certaine stabilité dans l'acquisition des connaissances liées au concept Polyèdres (principe de stabilisation, Lunkenbein, D. 1979, p. 24). On sait que cette stabilisation peut être favorisée d'une part, en mettant l'enfant en situation de faire de multiples transpositions ou applications du contenu proposé à de nouveaux contextes et d'autre part, en l'impliquant dans des modes divers de représentation pour accéder à la réalité étudiée. Dans l'unité d'enseignement développée autour du thème Polyèdres, nous avons plutôt exploité cette dernière façon de stabiliser la connaissance du concept Polyèdres chez l'enfant. C'est ainsi qu'à la suite de multiples manipulations suggérées à l'enfant sur des objets tri-dimensionnels, nous sommes passés à la représentation de polyèdres au moyen d'une photo (diapositive), puis, de là, à une troisième forme de représentation, celle du dessin, dans le plan, de l'image d'un polyèdre.

De façon plus simple et plus succincte, nous pouvons résumer en disant que, par l'unité d'enseignement Polyèdres, nous essayons de favoriser chez l'enfant, la structuration graduelle d'un univers géométrique précis à partir de:

- la reconnaissance des ressemblances et des différences entre des objets concrets;
- l'élaboration de propriétés pertinentes à ces objets;
- la découverte de relations diverses entre certains polyèdres;
- la formation de sous-ensembles de polyèdres;
- la réalisation d'activités de classification et de sériation et celle de raisonnements simples relatifs aux diverses propriétés des polyèdres.

Ainsi, osons-nous l'espérer, l'élève pourra, petit à petit, se construire une image mentale des diverses formes géométriques qui font l'objet d'une telle étude et les relier les unes aux autres par des opérations mentales. Un tel processus d'apprentissage résulte nécessairement d'expériences physiques (avec des objets concrets) et vise la construction de notions englobant une multitude d'exemples concrets et s'appliquant, par la suite, aux diverses situations particulières.

4.2 L'enseignant et la réalité scolaire

Dans un tel processus d'apprentissage, le rôle du maître est de stimuler l'enfant à faire des observations, à confronter ses observations avec la réalité physique ou avec des observations préalables, à faire des investigations "systématiques", à appliquer rigoureusement des notions déjà formées, etc.. En bref, l'enseignant doit agir en tant qu'animateur d'un processus plutôt qu'en tant que source d'informations.

Cependant, il est à craindre que ces considérations théoriques ne se heurtent à certaines contraintes provenant de la réalité scolaire elle-même, à savoir:

a) le peu de temps laissé à la disposition du maître pour que, en plus de s'acquitter quotidiennement des exigences de sa tâche: activités scolaires et para-scolaires, il puisse apporter une collaboration active et intensive pour faire de cette unité d'enseignement une adaptation personnelle ajustée aux besoins et possibilités de ses élèves.

b) le peu ou le manque de formation géométrique de l'enseignant face au rôle qu'on lui demande de jouer dans cette unité. Rares sont en effet les maîtres de l'élémentaire qui pensent exploration, construction, intuition, créativité, esthétique lorsqu'il s'agit de géométrie. Ils ont plutôt de cette dernière une idée assez rigide et convergente cristalisée autour des termes: théorèmes, définitions, éléments tels: droite, ligne, point, angle, etc..

4.3 Ambitions de l'unité d'enseignement

Pour obvier à ces deux carences majeures inhérentes à la condition scolaire actuelle, nous avons voulu créer une unité d'enseignement qui soit accessible aux maîtres en exercice sans pour autant dépendre de leur compétence ou formation antérieure et qui puisse servir tout aussi bien d'instrument de perfectionnement pour le maître que d'outil d'apprentissage pour l'enfant. En d'autres termes, nous avons voulu créer une unité d'enseignement dans laquelle le maître autant que l'enfant puissent s'impliquer dans un réel processus d'apprentissage.

Cette double ambition a eu comme effet d'imposer à notre unité un caractère plutôt directif. C'est ainsi que nous avons dû sacrifier certaines approches plus aptes à développer la pensée divergente de l'enfant au profit de la praticabilité et de la rentabilité de l'unité en milieu scolaire. Dans cette perspective, le moyen qui nous a semblé le mieux servir à la fois l'enseignant et l'enfant, de même que le plus approprié à l'exploration d'un univers tri-dimensionnel, a été celui d'un diaporama. Nous en traiterons de façon plus détaillée dans les pages qui suivent.

5 PROFIL D'UNE SITUATION CONCRETE D'APPRENTISSAGE

Le choix et la détermination du thème Polyèdres, sa justification à partir des objectifs précis que nous poursuivons, la délimitation du rationnel mathématique sur lequel se greffe le thème, la création d'un matériel concret approprié, enfin, les intentions psychologiques et pédagogiques qui servent le modèle cognitif de l'apprenant: voilà autant de facteurs déterminants qui ont présidé à l'élaboration du profil de notre unité d'enseignement et qui en ont dicté le déroulement et l'organisation tant matérielle que séquentielle.

5.1 Rôle attribué aux éléments de l'unité

Avant de décrire les diverses étapes de la démarche retenue, il y aurait lieu de préciser le rôle spécifique de chacun des éléments constitutifs de l'unité.

5.1.1 Le diaporama:

Il faut bien le reconnaître, l'audio-visuel est devenu fait culturel dans notre société et on peut dire que la civilisation de l'image a traversé les murs de nos écoles depuis quelques décennies déjà et l'appropriation de l'audio-visuel par les enseignants et pédagogues n'est plus à démontrer.

Si l'usage abusif et inadéquat de ce média de communication peut présenter certains dangers pour l'enseignement, il n'en reste pas moins que

l'audio-visuel, utilisé à bon escient, peut jouer un rôle éducatif important et présenter d'intéressants avantages.

Précisons d'abord que, dans l'élaboration de stratégies d'enseignement, l'audio-visuel peut s'ajuster tout aussi aisément aux objectifs qu'au style d'apprentissage de l'apprenant et à la démarche retenue par le maître pour favoriser l'apprentissage d'un concept. Il fournit à celui-ci, comme aux didacticiens d'ailleurs, un outil intéressant qui leur permet, dans la pratique quotidienne, de stimuler certains apprentissages, de transmettre des contenus avec une efficacité et une clarté plus grande, d'illustrer un concept précis de façon visuelle et auditive, d'exercer et de développer chez l'étudiant, la capacité à structurer, à synthétiser par une représentation graduelle et progressive de la structure inhérente à une situation ou à un univers donné, enfin, de "susciter l'intérêt et soutenir la motivation puisqu'il engage la vue, l'ouïe, le toucher et finalement tout l'être" de l'apprenant (Grégoire, R. 1978, p. 15).

S'il est vrai que "certains étudiants, d'après leur style même d'apprentissage, privilégient l'utilisation de moyens audio-visuels" (Geiser, R. 1979, p. 2) dans leur formation intellectuelle, il n'est pas moins vrai que certains objectifs d'apprentissage comme tels, se réalisent plus facilement à l'aide de ces mêmes moyens. Ainsi en est-il, par exemple, de l'enseignement des concepts liés à la géométrie tri-dimensionnelle. Comme nous l'avons rappelé plus haut, au niveau des principes didactiques qui ont guidé notre unité, l'outil diaporama

nous semble ménager à l'enfant un transfert progressif entre l'objet tri-dimensionnel réel et sa représentation graphique. La photographie d'un bloc que l'enfant voit à l'écran est moins déroutante pour lui qu'une représentation graphique qu'on pourrait lui en faire sur papier. De plus, la photographie nous permet d'illustrer progressivement les étapes successives de la construction d'un polyèdre, ou inversement, de le réduire à plat pour mettre en évidence telle ou telle propriété des faces ou de groupes de faces.

Si la construction, par un diaporama, d'une telle unité d'enseignement pour son usage dans les classes, peut être d'un grand secours pour le maître à court de moyens et de matériels adéquats pour favoriser l'apprentissage par l'enfant du concept de Polyèdre, il faut reconnaître que cette production pédagogique fixée, figée, stéréotypée sur bandes sonores et diapositives, peut inciter l'enseignant opportuniste à <u>l'utiliser</u> plutôt qu'à <u>l'exploiter</u> de façon dynamique et ajustée à son groupe d'enfants. Nous n'avons pas, malgré notre souci de favoriser un apprentissage actif, échappé à ce risque qu'encourt toute personne qui travaille de façon active et directe à fournir aux maîtres en exercice des outils efficaces pour leur enseignement.

Aussi, insistons-nous vigoureusement pour que le maître n'administre pas comme tel ce diaporama à sa classe d'enfants. Qu'il s'en serve ou bien comme outil d'informations personnelles lui permettant, par la suite, de créer sa propre unité d'enseignement pour ses élèves; ou bien qu'il s'en serve comme guide d'exploration et de structuration de l'ensemble de polyèdres proposé. En

d'autres termes, qu'il l'utilise mais en le faisant sien, i.e., qu'il y intercale, au besoin, des commentaires, des observations, des mises au point; qu'il ouvre des pistes nouvelles de réflexion, qu'il stimule l'élève à faire ses propres observations, découvertes, prises de consciences, etc.. Enfin, que face à ce diaporama, le maître agisse plutôt comme un animateur que comme un utilisateur passif d'une source d'informations programmées.

5.1.2 Le matériel

Quoiqu'un matériel de manipulation soit nécessaire dans l'enseignement de la géométrie au primaire parce qu'il sert de support concret aux notions dont l'enfant doit faire l'apprentissage, il n'en reste pas moins que, par lui-même, le matériel n'offre aucune garantie de réussite, car "seule l'activité mentale qu'un matériel suscite chez l'enfant est importante et peut engendrer la mathématique" (Goutard, M. 1970, p. 4). Le matériel, en effet, peut provoquer chez l'enfant certaines constatations empiriques, illustrer les diverses propriétés structurantes du contexte conceptuel ou encore représenter concrètement un ensemble de relations pertinentes, mais seul l'enfant peut décider ou non d'entrer en contact intérieurement avec le dynamisme de l'activité proposée, c'est-à-dire de faire que ses perceptions et ses connaissances nouvellement acquises ne restent pas isolées ou statiques, mais qu'elles s'articulent plutôt dans des systèmes cohérents (groupements) et viennent enrichir son univers mental.

C'est avec cette ambition qui déborde de beaucoup la puissance intrinsèque du matériel que nous avons conçu cette unité d'enseignement sur les Polyèdres. Ces objets concrets veulent accompagner et soutenir le développement du concept polyèdre chez l'enfant, mais ils ne doivent pas être retenus pour eux-mêmes: ils ne sont qu'une illustration d'un concept mathématique, ils ne sont pas le concept.

5.1.3 Les fiches

La fiche est peut-être le médium d'enseignement le plus en usage dans un grand nombre d'écoles élémentaires et secondaires aujourd'hui. Multiples et variés sont les rôles qu'on lui fait jouer mais, de façon globale et simplifiée, reconnaissons que la fiche peut servir ou bien à stimuler et accompagner l'apprentissage ou bien à évaluer et contrôler l'acquisition des connaissances et des habiletés.

Aux fins de l'unité Polyèdres, nous avons conçu deux types précis de fiches, à savoir:

- les fiches d'exploration
- les fiches de travail.

L'une et l'autre de ces deux catégories de fiches peuvent servir tout aussi bien à contrôler qu'à favoriser l'apprentissage.

5.1.3.1 Fiches d'exploration

Les fiches d'exploration sont proposées aux enfants après une période plus ou moins longue d'exploration libre sur les polyèdres. Dans un premier temps, les fiches invitent l'enfant à s'exprimer sur ce qu'il perçoit, c'est-à-dire, à décrire dans ses propres mots (plus ou moins fantaisistes) ce qu'il voit, touche ou appréhende. Dans un deuxième temps, elles attirent l'attention de l'enfant sur les ressemblances entre deux ou plusieurs polyèdres, l'invitant par la suite, à les regrouper pour une raison de convenance. Ainsi, ces premières fiches peuvent-elles favoriser déjà l'éclosion de certains germes d'organisation dans l'univers des polyèdres. Dans un troisième temps, les fiches proposent aux enfants d'observer deux blocs et de dire non seulement en quoi ils sont différents, mais aussi de trouver en quoi ils sont semblables (ou pareils). Ces exercices de discrimination grossière et parfois tout à fait émotive, sont importants pour l'enfant dans l'appréhension de la réalité Polyèdres, car non seulement ils le familiarisent avec les éléments de l'univers, mais ils peuvent déclencher chez-lui une activité mentale féconde.

Il est à noter, qu'en plus de servir comme guide de discrimination et d'appréhension les propriétés pertinentes, ces fiches peuvent également être administrées comme pré-test et post-test, permettant au maître de connaître le degré de connaissance du concept Polyèdre avant l'unité d'enseignement, d'une part, (pré-test) puis, de les comparer avec celles qu'il aura acquises au cours de l'unité, d'autre part (post-test).

5.1.3.2 Fiches de travail

Sans prétendre que l'usage des fiches de travail soit le meilleur type d'application de la pédagogie d'animation et d'encadrement de l'apprentissage, nous sommes convaincus que la fiche de travail constitue un moyen d'animation qui laisse une porte ouverte à un grand nombre de variantes. Elle comporte évidemment des inconvénients, surtout au stade de sa préparation: elle demande de constants ajustements, souvent même des remaniements importants. Mais, les avantages que nous pouvons en retirer compensent largement les inconvénients qu'elle peut présenter.

Dans l'unité d'enseignement Polyèdres, nous avons conçu les fiches de travail un peu comme des feuilles de route pour les enfants. Accompagnant le diaporama et allant constamment de pair avec l'utilisation du matériel, celles-ci jouent un rôle de guide pour l'enfant dans sa démarche de structuration progressive des Polyèdres. En d'autres termes, et plus exactement, disons que "la fiche devient le professeur particulier de chaque élève" (Patenaude, P. 1969, p. 8) dans cette unité.

Cependant, même si la fiche se substitue au maître, elle ne dégage pas pour autant ce dernier de sa responsabilité d'animateur. "Cette tâche comporte une part d'intervention directe auprès du groupe, d'une part, pour réchauffer l'enthousiasme et, d'autre part, pour sensibiliser les enfants aux concepts à explorer" (Patenaude, P. 1969, p. 9). Il lui revient donc, par des interventions appropriées et succinctes, de maintenir l'esprit en éveil, d'orienter les efforts vert les buts

visés, d'interpeler les enfants lorsqu'ils s'égarent afin que d'eux-mêmes ils décèlent leurs erreurs puis les corrigent, de ménager de brèves mises au point, à l'occasion, de commenter certaines données du diaporama ou des fiches comme telles, enfin, de faire profiter tout le groupe de l'une ou l'autre des heureuses initiatives de certains enfants plus clairvoyants ou plus facilement stimulés par les activités proposées.

Comme, en général, l'élève est plus sensible à l'image qu'au texte et qu'"une image vaut mille mots", nous avons essayé d'aérer le plus possible la présentation du contenu des fiches, en y réduisant au minimum la littérature. "Se situant à mi-chemin entre le manuel scolaire et le texte programmé" (Patenaude, P. 1969, p.8), la fiche contient des questions, suggère une démarche, propose une représentation, fournit des réponses, déborde parfois le contenu du diaporama et force l'enfant à pousser plus loin l'application de ses récentes découvertes. Rares, par contre, sont les fiches qui présentent des illustrations succeptibles d'éclairer les notions et cela, afin de ne pas faire double emploi avec l'image fournie par le diaporama lui-même.

Ainsi donc les fiches proposées sont plutôt des fiches d'accompagnement du diaporama; elles présentent aux enfants divers types d'activités tels, des exercices de familiarisation, d'approfondissement, de fixation, de formulation, d'abstraction, et finalement de généralisation que nous pourrions schématiser comme suit:

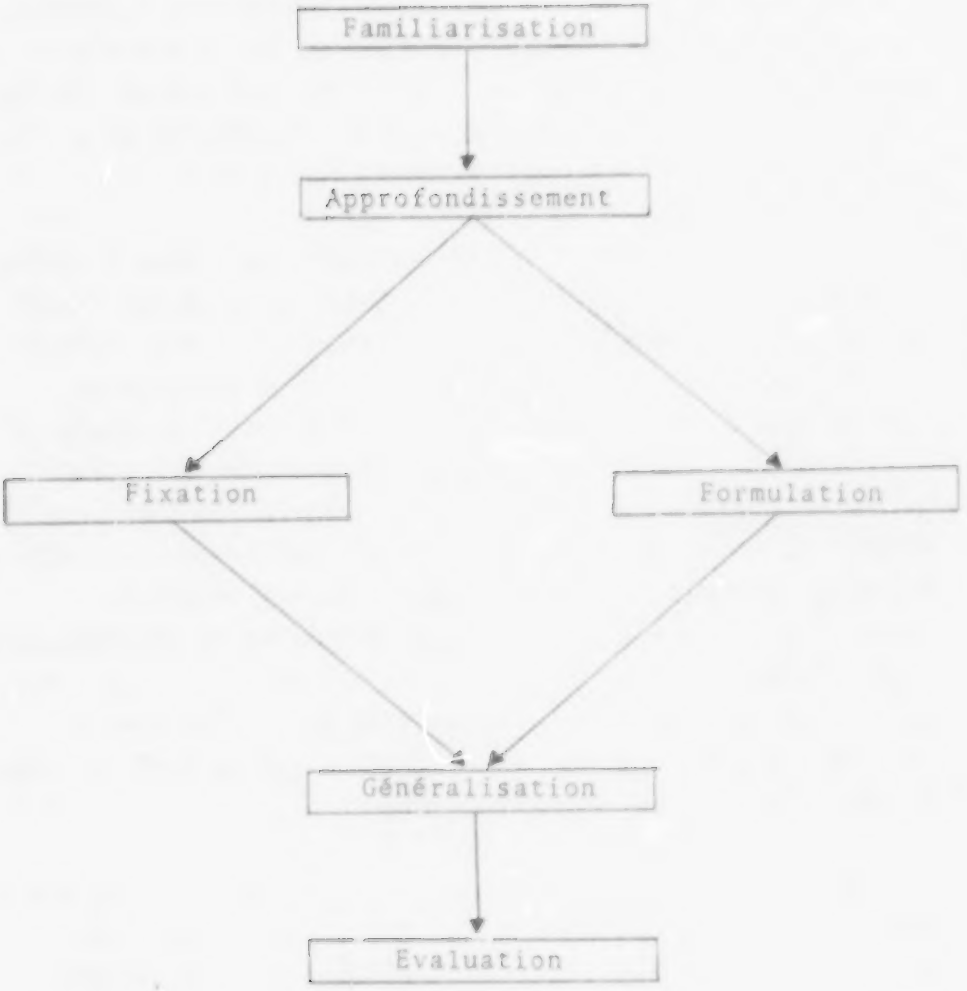


Figure 11: Types d'exercices proposés dans les fiches de travail

5.1.4 Le cahier de construction

Si l'exploitation active du diaporama se conçoit difficilement sans l'usage d'un matériel concret de manipulation, il ne saurait être davantage respectueux du cheminement intellectuel de l'enfant vers l'acquisition du concept Polyèdre s'il ne lui fournissait une occasion de bâtir lui-même certains polyèdres et de démystifier, par le fait même, ces êtres tri-dimensionnels qui sont le support réel du concept. Partir d'une représentation bi-dimensionnelle (à plat) d'un polyèdre, la découper, la p'ier à la limite (arête) de chacune des parties qu'on nommera plus tard "face", la refermer progressivement de façon à prendre conscience qu'elle peut emprisonner un espace, puis, finalement, la coller et réaliser que l'objet nouvellement créé s'apparente à ceux qui sont devant lui: voilà qui introduit l'apprenant de façon naturelle, progressive et dynamique dans le processus d'apprentissage du concept retenu.

C'est dans cette perspective et avec ce souci de faire construire un polyèdre avant d'en proposer une analyse de ses parties constituantes et de ses propriétés, que nous avons conçu ce cahier de construction.

5.1.5 Le guide du maître

Le guide se veut avant tout pour le maître un instrument accompagnateur pour mieux comprendre les intentions théoriques et pédagogiques de l'unité. Voilà pourquoi, il ne se contente pas de fournir le solutionnaire aux fiches de travail. Il insiste sur l'apprentissage

favorisé, sur le rôle de l'enseignant dans cette unité, sur l'organisation des activités proposées, sur le rôle des principaux éléments de l'unité et enfin sur l'objectif particulier poursuivi par chacune des fiches proposées.

Même si ce guide n'assure pas de façon automatique le succès à cette unité, il peut réduire de beaucoup la marge de fausses manoeuvres dans la façon de l'utiliser et minimiser ainsi les malencontreux effets sur l'apprenant, d'une pédagogie trop dirigiste, convergente malgré des médias nouveaux et attirants.

5.2 Description de la démarche retenue pour le diaporama

Le diaporama est une introduction à une structuration du contexte conceptuel Polyèdres. Il est constitué de quatre leçons de longueur inégale initiant respectivement aux quatre notions suivantes:

- celle d'hexaèdre (leçon 1)
- celle de pyramide (leçon 2)
- celle de prisme (leçon 3)
- celle de polyèdre semi-régulier (leçon 4)

Avant de procéder aux commentaires particuliers à chacune de ces quatre leçons, voici, de façon globale et synthétique, les articulations de ce contenu.

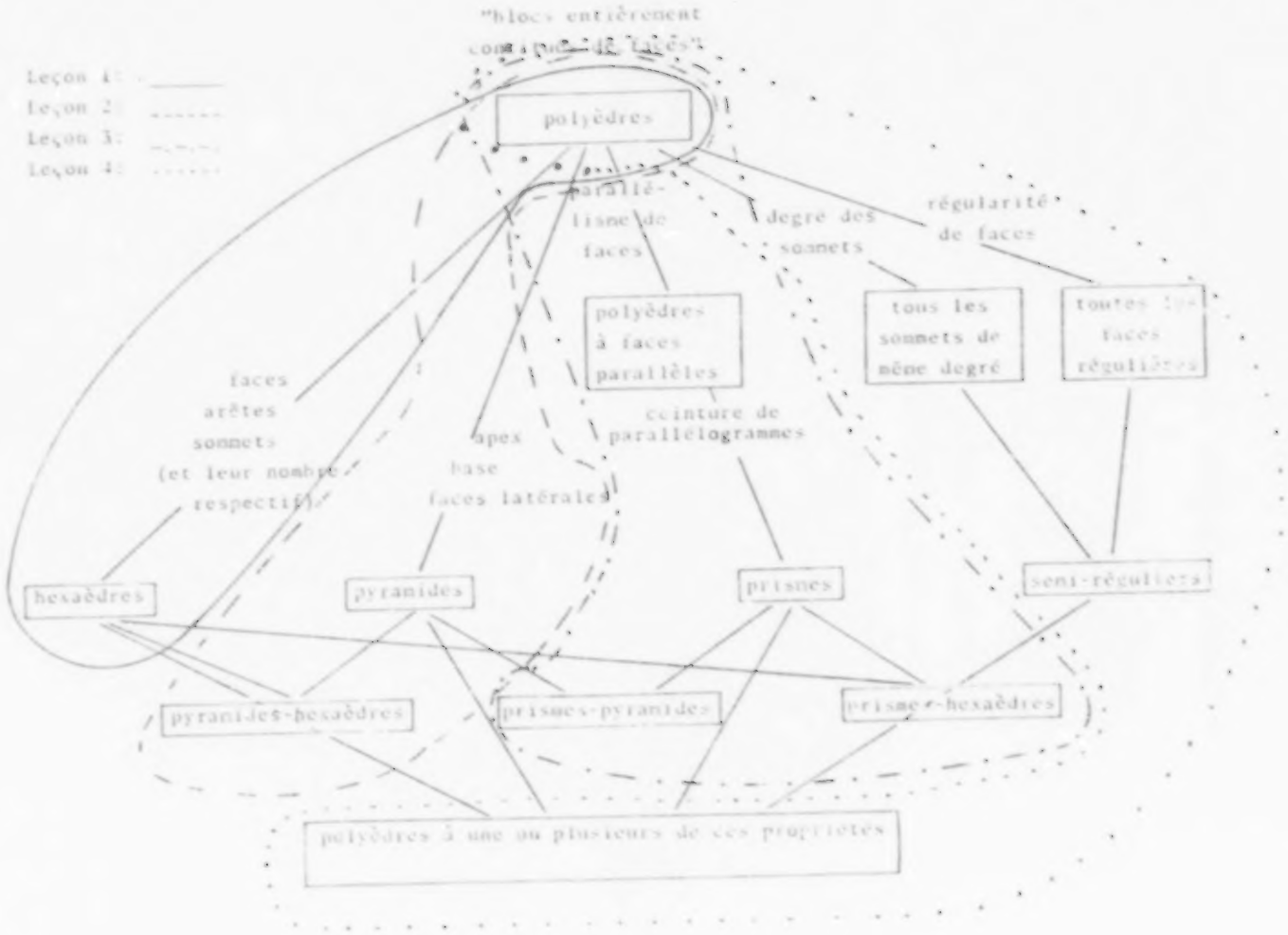


Figure 12: Structure du contenu du diaporama

5.2.1 Leçon 1

Avant d'introduire à la notion d'hexaèdre, la leçon 1 pose les généralités ou sous-concepts de base à savoir:

- le concept de face
- le concept d'arête
- le concept de sommet,

pour en arriver au concept plus englobant de Polyèdre. Cette démarche présente un à un les germes de la définition et incite l'enfant à les réunir progressivement en un tout significatif et cohérent. Pour ce faire, elle introduit petit à petit l'enfant dans une procédure graduée de construction d'un polyèdre donné, faisant ressortir le rôle des parties constituantes d'un polyèdre.

Dans un deuxième temps, la leçon 1 sensibilise l'enfant à l'idée de compter les faces, les sommets, les arêtes des polyèdres présentés et par la suite, à les classifier et identifier d'après le nombre de leurs faces. Les activités de comptage des éléments constituants d'un polyèdre, quelque simples qu'elles puissent paraître, peuvent être, pour l'enfant, occasion de conscientiser les structures inhérentes à divers polyèdres afin de systématiser ce processus de comptage. Ces activités peuvent donner lieu à de multiples observations qui révéleraient l'état de conceptualisation, par l'enfant, des diverses propriétés des objets concrets. La famille (6, 8, 12) des hexaèdres à huit sommets et douze arêtes, à cause de son lien de parenté avec le cube, est présentée ici comme une classe privilégiée de polyèdres. Cette première leçon, il va sans dire, s'accompagne de manipulations, d'exercices de construction et de fiches de travail.

5.2.2 Leçon 2

La deuxième leçon exploite plutôt la notion de pyramide. Cette dernière est introduite à partir de l'idée intuitive que les enfants se font d'une pyramide. Avec la seule projection à l'écran d'un ensemble de pyramides d'Egypte, les enfants réussissent, en général, à soustirer du grand ensemble, le sous-ensemble des six pyramides qu'il contient. Deux questions surgissent invariablement de cet exercice de sélection: l'octaèdre régulier (S) est-il une double pyramide, et une pyramide peut-elle être non-convexe?

Après cette approche intuitive, la leçon prépare graduellement à la définition en introduisant de façon descriptive et imagée, les principaux éléments constitutifs de la pyramide:

- l'apex
- les faces latérales triangulaires
- le polygone de base

Enfin, dans un dernier temps, elle présente aux enfants une définition rigoureuse de la pyramide et leur propose de former à nouveau le sous-ensemble des polyèdres-pyramides, puis celui des pyramides-hexaèdres

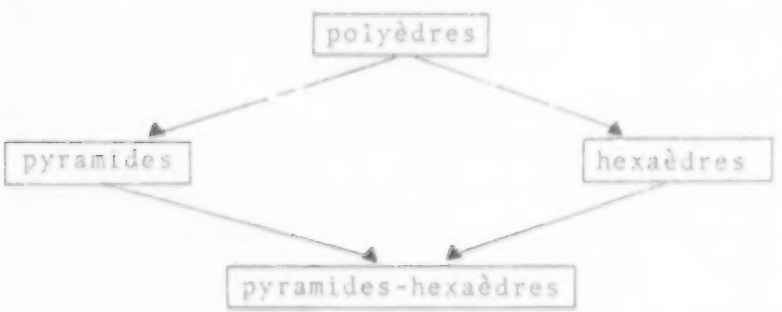


Figure 13: Engendrement des pyramides-hexaèdres

Comme il a été dit pour la leçon 1, cette deuxième leçon fait, elle aussi, appel à la manipulation, à la construction et se prolonge dans des exercices variés d'approfondissement. Ces derniers font ressortir davantage la structure topologique des pyramides en tant que polyèdres du type (n + 1, n + 1, 2n) pour toute pyramide dont la base est un polygone à n côtés.

5.2.3 Leçon 3

La leçon 3 veut initier les enfants à la notion de prisme. Cette notion est moins naturelle et plus complexe que celle d'hexaèdre ou de pyramide puisqu'elle est le résultat de la superposition de deux conditions composées, chacune faisant appel à la notion de parallélisme qui n'est pas nécessairement maîtrisée des enfants:

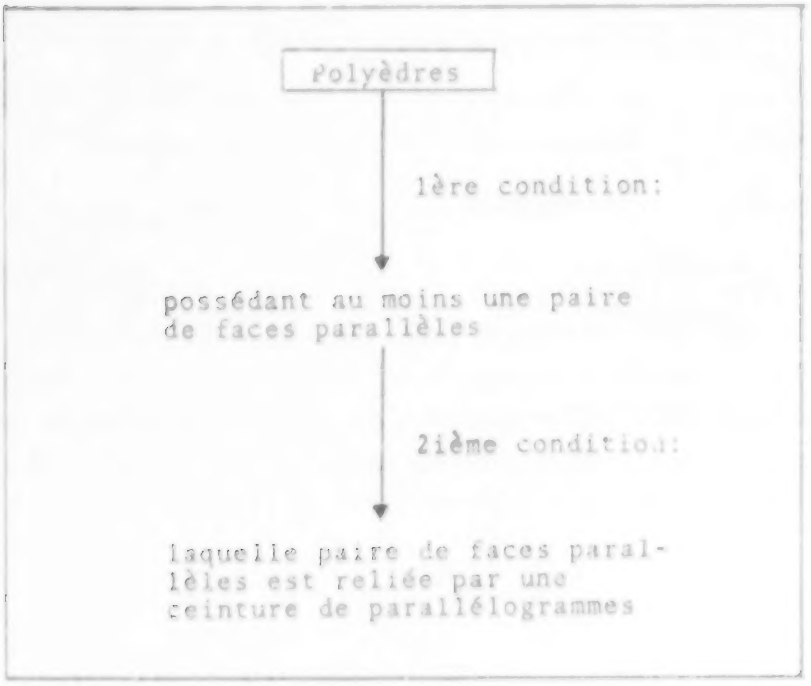


Figure 14: Définition de la notion de prisme

Une première expérimentation du diaporama avec divers groupes d'enfants de 5e année nous a convaincus de la nécessité de pré-assurer la compréhension de chacune des deux conditions avant d'en faire la superposition. Au chapitre 6 de ce rapport, (page 61) nous expliciterons les remaniements que nous avons dû faire à cette partie de l'unité pour remédier aux carences des enfants et assurer au concept de prisme un minimum d'accueil par les enfants.

Poursuivant l'idée de stabiliser en même temps que de renforcer les notions abordées au cours des deux premières leçons, et ambitionnant en même temps d'organiser progressivement la structuration envisagée, nous orientons la démarche vers des exercices du genre:

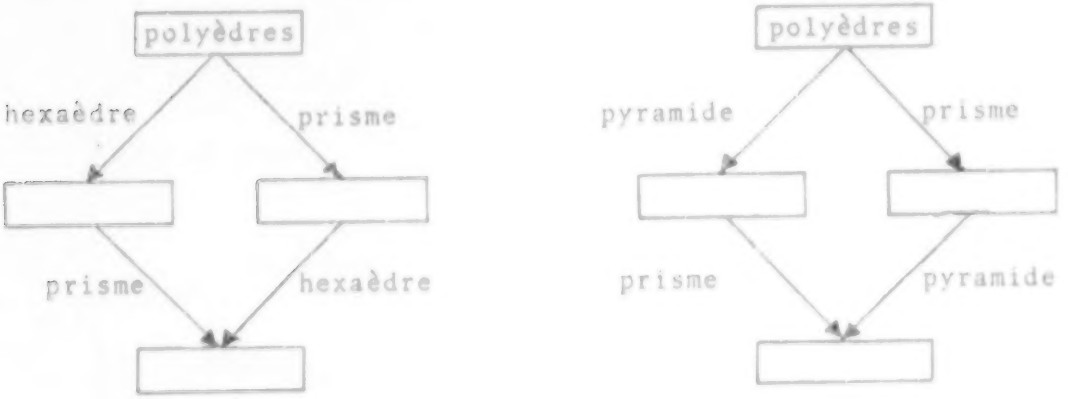


Figure 15: Engendrement de prismes-hexaèdres ou de prisme-pyramide

pour susciter des questions comme:

- as-tu découvert des pyramides qui sont des prismes?

- sinon, peux-tu en imaginer? Pourquoi?

Ainsi, peut-on attirer l'attention de l'enfant sur le fait que chaque face d'une pyramide touche à chacune des autres faces au moins par un point. Pour cela, une pyramide ne pourra jamais remplir les conditions de la définition du prisme.

La leçon 3, à cause de sa complexité doit donc être administrée avec beaucoup de soin et être respectueuse du cheminement et du rythme de chaque enfant. Elle pré-suppose de la part de l'apprenant une certaine maturité pour manier avec aisance la composition des notions impliquées et des conditions définissantes. Il va sans dire qu'elle nécessite beaucoup d'exercices de manipulation, d'approfondissement, de fixation et de formulation même.

5.2.4 Leçon 4

La quatrième leçon pousse plus loin, elle vise à la conception de la classe des polyèdres semi-réguliers. Cette dernière notion est plus complexe encore que celle de prisme. D'abord, elle est la conjonction de deux propriétés indépendantes, à savoir: la régularité des faces et l'égalité des degrés des sommets. En voici

le schéma:

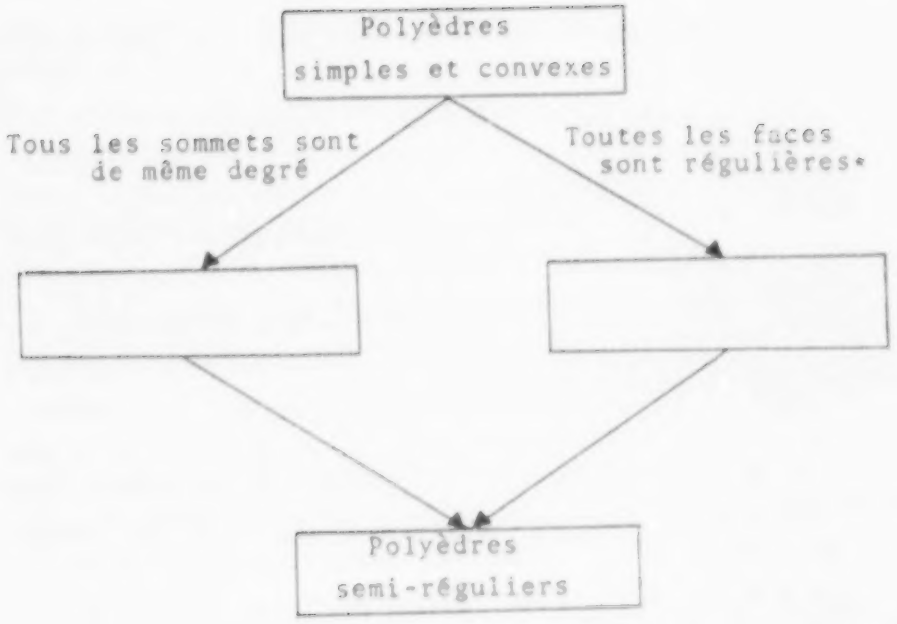


Figure 16: Engendrement des polyèdres semi-réguliers

Ensuite, la notion des faces régulières est elle-même la conjonction de deux propriétés indépendantes de polygones, à savoir: l'équiangularité et l'équilatéralité.

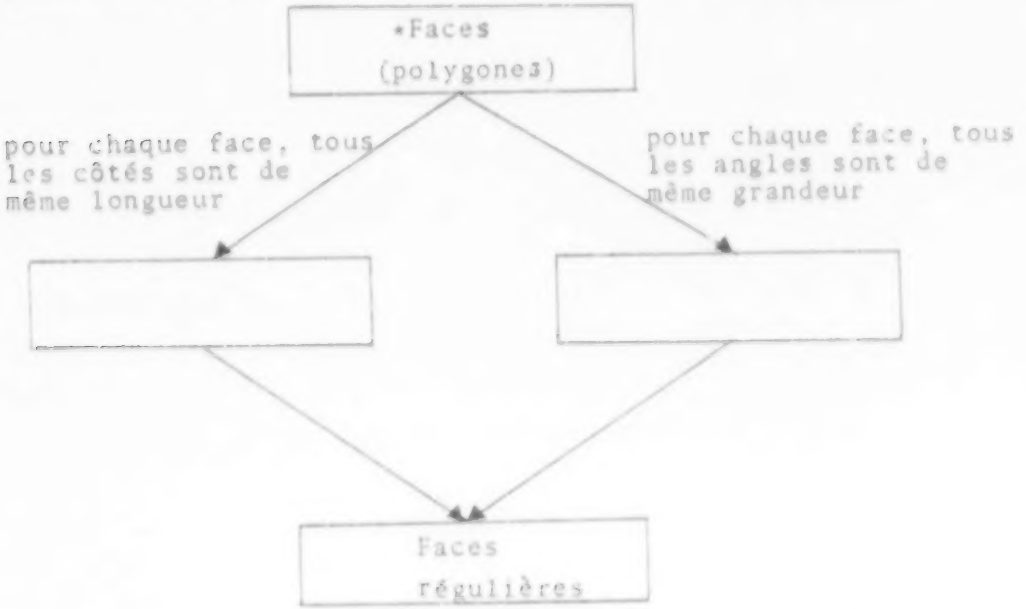


Figure 17: Engendrement de polygones réguliers

Afin de ménager une certaine gradation dans les difficultés et d'assurer l'un après l'autre les éléments constitutifs de la définition, l'unité propose d'abord aux enfants de retirer de l'ensemble de tous leurs polyèdres ceux dont tous les sommets sont de même degré. Cette consigne est longue à vérifier pour les enfants, mais elle ne présente aucune difficulté.

Dans un deuxième temps, la 4e leçon veut familiariser l'enfant avec la notion de "faces régulières". Lorsque l'enfant a bien saisi cette notion par la conjonction des deux propriétés décrites plus haut, il est prêt à conjoindre maintenant cette dernière notion à celle des sommets de même degré dans un polyèdre.

Il va sans dire que les difficultés ne se présentent pas au niveau de la compréhension des sous-notions prises isolément mais plutôt au plan du "regroupement" des conditions favorables, pour en réaliser les deux conjonctions.

La dernière partie de la leçon 4 présente une synthèse de la démarche poursuivie depuis le début du diaporama et propose aux enfants une caractérisation (la plus complète possible) de chaque polyèdre selon les critères retenus dans l'unité. C'est le grand pas dans l'étape de la description de chaque objet au moyen des propriétés qui le distinguent ou l'apparentent à d'autres éléments de l'univers.

Voilà décrites très sommairement les quatre leçons contenues dans le diaporama Polyèdres. Chacune de ces leçons se développe en une ou plusieurs séquences d'exposés, d'explorations, d'applications et de vérifications.

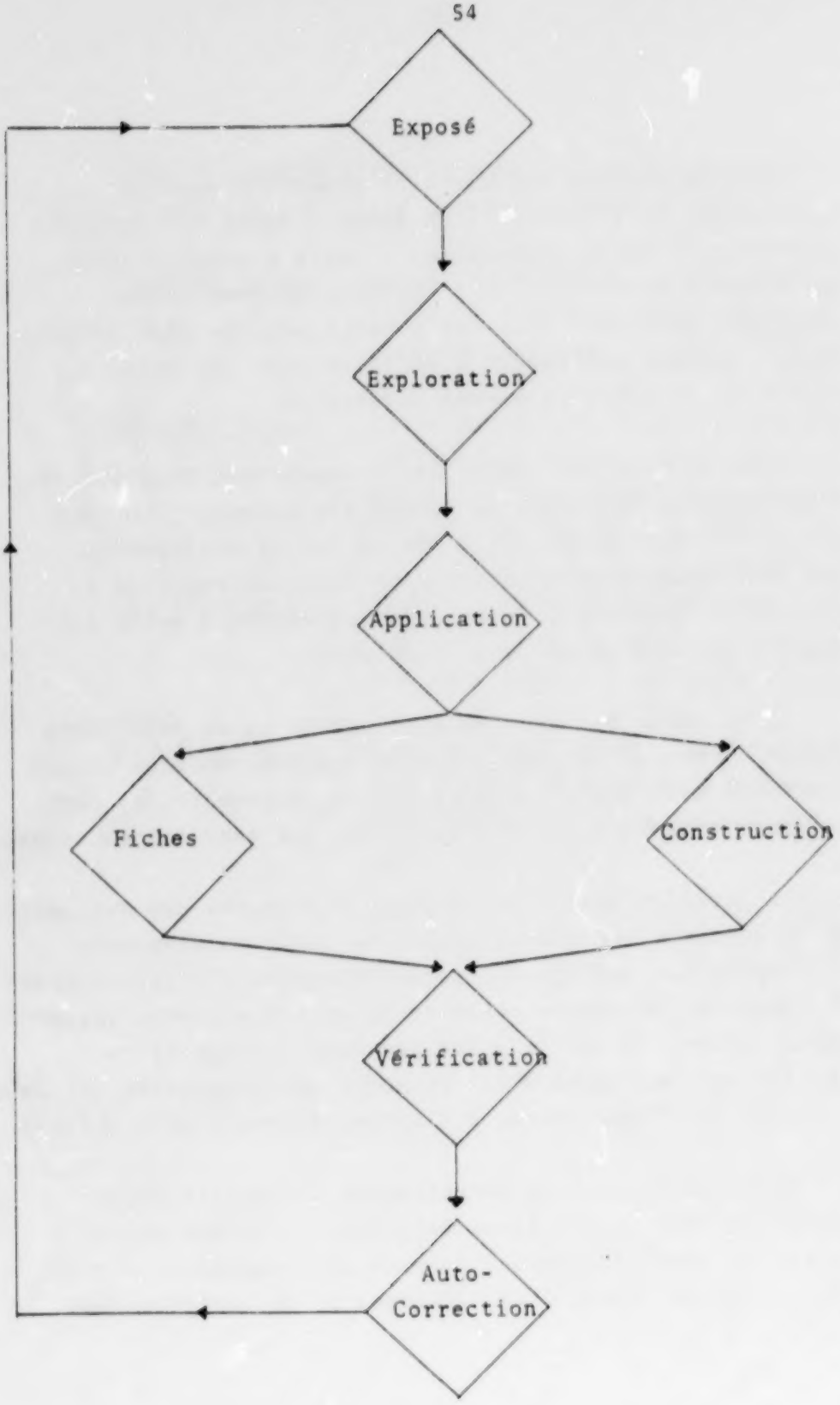


Figure 18: Séquence de déroulement du diaporama

Quant à l'unité d'enseignement, dans sa globalité, elle s'articule en quatre grandes étapes, à savoir;

Première étape : Celle des activités d'exploration libre où l'enfant prend contact avec le matériel.

Deuxième étape : Celle des activités d'exploration dirigée qui servent d'amorce au diaporama (vérification de l'état initial des connaissances).

Troisième étape: Celle du diaporama comme tel, constitué des quatre leçons décrites plus haut.

Quatrième étape: Celle des activités d'exploration dirigée qui peuvent être réutilisées comme exercices de contrôle (post-expérience).

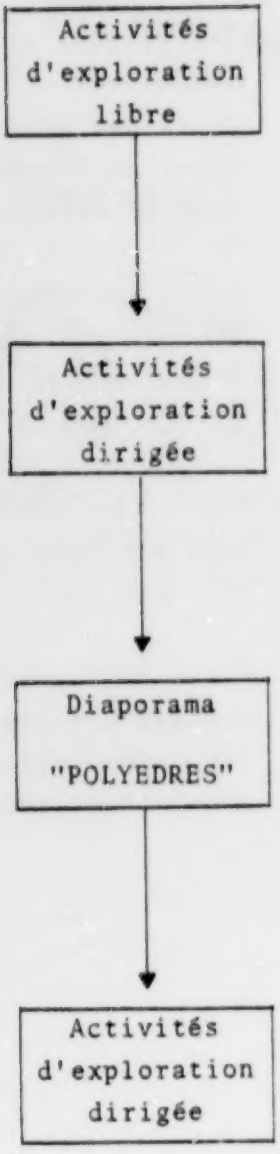


Figure 19: Schéma du déroulement de l'unité d'enseignement

Comparant les résultats obtenus à l'étape terminale avec ceux recueillis à la deuxième étape, le maître peut apprécier l'effet de l'unité sur l'acquis notionnel de l'enfant.

Par contre, la progression, le développement ou l'acquisition du concept Polyèdre chez l'enfant n'est pas chose aussi facile à évaluer. Il ne faut pas prétendre mesurer l'apprentissage avec des moyens aussi limités que de simples tests accompagnant une unité d'enseignement laquelle se veut d'abord et avant tout, dans la ligne des moyens didactiques, un facteur de démarrage d'un processus de formation de concepts et non pas un moyen sûr et efficace de favoriser, de façon complète et définitive, l'acquisition du concept Polyèdre.

6. APPLICATION DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT

6.1 La clientèle

Selon les intentions poursuivies, les besoins pédagogiques et les réclames du milieu, l'unité d'enseignement Polyèdres a connu trois modalités d'application:

a) applications expérimentales
Pour des fins de recherche, celles-ci ont été menées auprès d'une cinquantaine d'enfants dont l'âge varie entre 9 et 12 ans. Une analyse détaillée de cette expérimentation sera présentée au point 7 du présent document.

b) applications non-formelles
D'une part, pour des besoins académiques, dans le cadre de la formation de futurs-maîtres et de maîtres en exercice, l'unité d'enseignement a été présentée à différents groupes d'étudiants de la formation des Maîtres et de l'Education Permanente. D'autre part, pour répondre aux besoins pressants du milieu scolaire, principalement dans la région de l'Estrie, cette unité d'enseignement a été utilisée pour fins d'information, de formation et d'application, soit par les maîtres eux-mêmes, soit par des étudiants en stage de formation. Dans un cas comme dans l'autre, l'expérimentation a été menée de façon non-formelle. Pour cela, nous nous contenterons, au chapitre de l'évaluation, de rappeler, à titre indicatif, les commentaires qui nous en ont été fournis par les utilisateurs.

c) présentations à des congrès

Cette modeste réalisation, pouvant servir d'exemple d'un type particulier de recherche et s'inscrivant dans le cadre d'une recherche plus vaste, a été présentée à plusieurs congrès ou rencontres de didacticiens et praticiens de l'enseignement (APAME, AMQ, CQEE, CIEAEM, Ateliers pédagogiques, etc.). En plus de susciter l'intérêt chez des participants, cette présentation de l'unité a donné lieu à maintes discussions et critiques réalistes, constructives et par là, enrichissantes. Nous en rapporterons certains éléments plus pertinents dans le prochain chapitre.

6.2 Les modalités d'utilisation

Le diaporama ayant été principalement conçu pour de petites équipes, l'un et l'autre de ces deux types de clientèles ont été appelés à travailler en petits groupes de 4 ou 5 autour d'un ensemble de 26 polyèdres. Lorsque les groupes dépassaient cinq sujets, le diaporama était projeté sur grand écran au moyen de l'appareil Telex. Les arrêts étaient alors contrôlés par le maître ou l'expérimentateur qui, malgré toute sa bonne volonté, avaient du mal à déterminer la longueur des temps d'arrêt pour satisfaire aux besoins de la majorité des sujets: alors que certains pouvaient perdre leur temps, d'autres devaient précipiter leur apprentissage et s'accomoder d'un rythme plus ou moins ajusté à eux. Lorsqu'au contraire, l'expérimentation était menée avec

un petit groupe d'enfants (5 ou moins), l'appareil Caramate avec son mini-écran et son fonctionnement ultra simple était beaucoup mieux approprié et permettait à l'enfant d'être lui-même l'agent contrôleur de la durée de ses propres périodes de réflexion, de manipulation et d'approfondissement des notions. Ainsi l'unité devenait-elle plus souple et plus respectueuse du rythme individuel de l'apprenant et, par ricochet, la motivation était-elle plus soutenue.

Pour pallier un peu aux inconvénients d'une projection sur grand écran pour une classe entière[1], et afin d'atténuer les écarts de rythmes d'apprentissage chez les apprenants, nous avons suggéré aux maîtres de dispenser les enfants plus lents des questions étoilées (*, **) des fiches et d'encourager les enfants plus rapides à s'engager dans la résolution de ces problèmes, en général, plus complexes.

6.3 La démarche

L'expérimentation ayant été menée dans tel contexte social et culturel, avec des enfants ayant eu telle catégorie d'enseignants avec tel type de pédagogie, il devient relativement facile de dépister les séquences d'unité mal adaptées au développement cognitif des enfants et, par là, moins motivantes pour eux. C'est

---

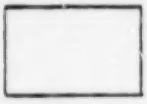
(1) A cet effet, un professeur a pris l'initiative d'initier à l'avance une équipe d'enfants qui sont devenus, par la suite, des moniteurs au niveau des petites équipes d'enfants de sa classe.

ainsi que, suite aux résultats partiels recueillis au cours de nos premières séances d'expérimentation, des réajustements se sont avérés nécessaires en regard de la 3e leçon de l'unité et ont suscité la formation d'un sous-cycle (6 → 8) dans le modèle de travail (voir figure 1 de l'introduction) sur lequel nous nous sommes appuyés pour le présent travail.

Dans sa première version, la leçon 3 de l'unité introduisait à la notion de prisme en faisant appel à la notion de parallélogramme présumant que cette dernière était déjà stabilisée chez l'enfant. Or, pour de multiples raisons dont l'analyse a été faite ailleurs (Lunkenbein, D., Allard, H., Goupille, C. 1979, p. 16 à 19) analyser en détails ici, les enfants n'admettent comme parallélogramme que des quadrilatères ayant deux paires de côtés parallèles mais qui sont différents du losange, du rectangle et du carré. Leur connaissance du concept parallélogramme semble réduite à l'image visuelle unique qu'on leur en a sans doute donnée, à savoir:

Et, à cet égard, l'avis de la plupart des adultes rencontrés dans l'enseignement à l'élémentaire ne diffère guère de celui des enfants. Pour eux:

n'est pas un parallélogramme



n'est pas un parallélogramme

n'est pas un parallélogramme

A cause de cette conception trop particulière restreinte et limitée du concept de parallélogramme, nous avons dû insérer trois fiches d'introduction à l'ensemble des fiches accompagnant la leçon 3.[1]

Ces fiches présentent plusieurs exercices d'inclusion de sous-ensembles de polygones et mettent en lumière, au moyen de treillis de groupements booléens, l'"emboîtement des classes" de quadrilatères. Dans l'optique d'une telle démarche, on peut espérer que l'enfant, après s'être familiarisé avec le fait que l'ensemble des carrés est inclus dans l'ensemble des rectangles, lui-même inclus dans l'ensemble des parallélogrammes et que ce dernier est inclus dans l'ensemble des trapèzes qui est à son tour inclus dans l'ensemble des quadrilatères, puisse, petit à petit, en arriver à se convaincre que le carré est nécessairement trapèze, parallélogramme et rectangle.

Quant à la stratégie d'introduction à la notion de prisme, elle a été par le fait même beaucoup modifiée en ce sens que nous avons eu à développer de façon plus détaillée chacun des éléments constitutifs de la notion de prisme avant de les relier les uns aux autres pour en abstraire le concept de prisme lui-même.

---

1. cf. Cahier de fiches pages 11, 12, 13, 14, rapport no 25.

La formulation même de la définition a, elle aussi, été sujette à certaines transformations par souci d'accommodation au langage de l'enfant. Ainsi, l'expression: "paire de faces parallèles reliées directement et uniquement par des parallélogrammes" a-t-elle été remplacée par l'expression: "paire de faces parallèles reliées par une ceinture de parallélogrammes" qui se révèle très suggestive pour les enfants. C'est alors qu'à l'écran, la représentation ouverte de deux polyèdres possédant chacun une paire de faces parallèles a permis aux enfants de faire clairement la distinction, au niveau de la ceinture de quadrilatères, entre un prisme et un non-prisme.

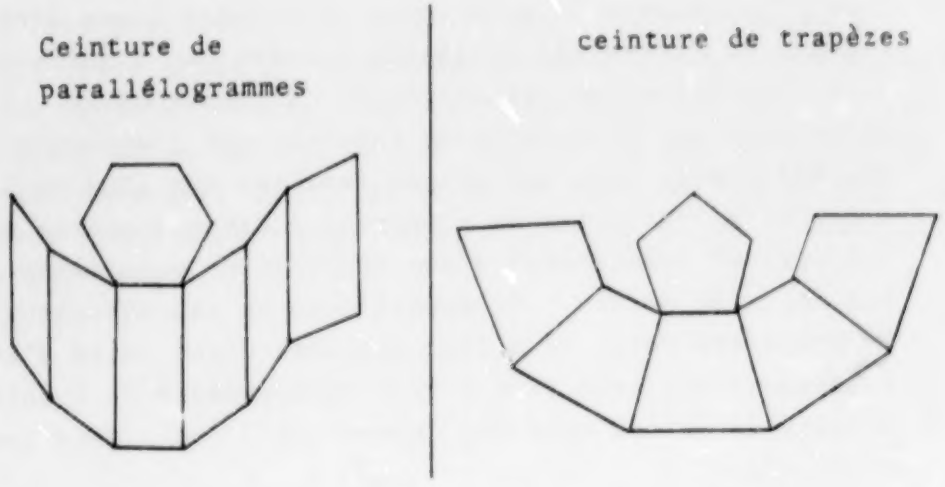


Figure 20: Illustration du terme "ceinture"

6.4 Les interventions

Parmi les objectifs visés lors de la construction d'une unité d'enseignement par le moyen d'un diaporama, nous avions mentionné celui de sa praticabilité pour une classe. Comme nous l'avons rappelé plus d'une fois déjà, nous avions voulu que, dans cette démarche l'enfant puisse s'impliquer de façon autonome dans un processus d'apprentissage, reconnaissant au maître un rôle d'animateur de ce processus, plutôt que de dispensateur d'informations. Or l'expérience nous a rappelé que, si noble que soit le rôle que l'on préconise pour le maître, celui-ci demeure toujours la personne à qui l'enfant recourt spontanément pour lever la moindre forme d'ambiguité au niveau des consignes données par l'audio-visuel, les fiches ou les exercices de construction. Et ce recours est d'autant plus fréquent que l'enfant n'a pas été placé, dans son milieu familial non plus qu'à l'école, en situation de s'exercer à devenir maître de son agir et indépendant d'une approbation ponctuelle de ses faits et gestes. Il appert donc un peu ambitieux de prétendre doter le milieu scolaire d'une unité d'enseignement qui soit tout à fait indépendante de l intervention du maître dans des choses aussi techniques que celles de:

- refermer la construction de façon à ce que le code qui l'identifie apparaisse à l'extérieur du polyèdre plutôt qu'à l'intérieur de celui-ci, une fois construit;

- suggérer à l'enfant de se référer à des résultats déjà trouvés pour les intégrer aux éléments qui lui sont fournis afin d'en arriver à un nouveau résultat: plusieurs enfants ont naturellement tendance à repartir à zéro pour aborder une résolution de problème;
- fournir aux enfants qui en éprouvent le besoin une série de polyèdres ouverts et réduits à plat pour faciliter le calcul du nombre des faces.

Ces détails, en apparence insignifiants, ne sont pas sans intérêt pour nous car ils viennent remettre en cause le rôle privilégié que nous voulions réserver au maître dans cette unité et au nom duquel nous avons consenti à un excès d'informations pratiques fournies tant à l'élève qu'au maître, lequel excès n'est pas sans quelque connivence avec un dirigisme qu'en fait, au nom de nos convictions didactiques, nous aimerions dénoncer plutôt qu'encourager.

7. RESULTATS D'APPLICATION DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT

Après avoir construit et appliqué une unité d'enseignement, on reste nécessairement avec le problème de son évaluation. Or, celui-ci étant en lui-même un problème de recherche, nous ne pouvons espérer que d'en indiquer ici, certains éléments bien particuliers de solution et cela relativement aux buts visés par l'unité elle-même. Il va sans dire que, dans le cadre de la présente recherche, il s'agit de l'évaluation de l'intervention didactique et non de l'évaluation d'élèves ou d'apprenants. Trop souvent hélas, en milieu scolaire, une telle évaluation est ou bien absente ou bien faite de façon très intuitive et trop subjective: elle se limite à des remarques subjectives sur la motivation soutenue des élèves, sur le progrès apparant des enfants, sur la praticabilité de l'unité, etc.. Dans le cadre de la présente recherche, nous avons tenté de recueillir des observations pertinentes et de développer quelques critères qui nous permettraient de nous prononcer plus objectivement sur la valeur du produit de nos réflexions et de nos activités didactiques. Les observations dont nous ferons d'abord état proviennent des applications non-formelles de l'unité menées, ou bien par des enseignants dans des classes de la C.S.C.S.[1], ou bien par nous-mêmes dans le cadre de cours dispensés aux étudiants en Formation des Maîtres à l'Université de Sherbrooke. Nous y adjoindrons également des remarques critiques recueillies lors de la présentation de l'unité à des congrès régionnaux ou internationaux. Par la suite, le rapport sur l'expérimentation de l'unité par les membres de l'équipe, traitera de moyens développés ou à développer pour juger de l'efficacité comme telle de l'unité.

---

1. Commission Scolaire Catholique de Sherbrooke

7.1 Observations recueillies lors des applications non-formelles

Les applications non-formelles ont révélé de positif, qu'en général et au niveau des utilisateurs, enseignants et futurs enseignants sont bien avides d'appliquer voire de réappliquer l'unité dans leur classe. Aussi l'un des deux exemplaires du diaporama que nous avons élaboré est-il constamment en usage dans des écoles de la C.S.C.S. et ceci, avec des délais de commande qui peuvent aller jusqu'à deux mois. Cela nous semble vérifier le besoin qu'ont les enseignants d'appliquer des suggestions concrètes pour l'enseignement de la géométrie tri-dimensionnelle. De plus, cet engouement pour le diaporama nous semble, en même temps, être un indice positif de la praticabilité de l'unité pour les enseignants. Les échos en provenance de ces applications non-formelles révèlent également que le contenu même de l'unité n'est pas chose acquise par l'utilisateur et que ce dernier, apprenant en même temps qu'enseignant, apprécie grandement la sécurité assurée par le dirigisme de l'unité. A preuve, les remarques et commentaires reçus d'enseignants-utilisateurs qui ne concernent presque exclusivement que le contenu et sa présentation bien guidée. Rares sont en effet les enseignants qui nous ont fait des remarques critiques de nature pédagogique ou didactique, ce qui vient confirmer d'une certaine manière, leur insécurité et leur manque d'expérience face au contenu lui-même.

La situation est bien différente lorsqu'il s'agit des réactions de collègues didacticiens. Bien intéressés

par la problématique du sujet, ils se heurtent, dans la plupart des cas, au caractère directif de l'unité et à la façon peu dynamique d'introduire les concepts. Il faut le reconnaître, l'unité met beaucoup d'importance sur la mise en place du vocabulaire et sur les activités de discrimination, deux facteurs qui favorisent la formation de la teneur extensive plutôt qu'intensive (Martin, L. 1976, p. 28) des concepts impliqués. C'est ainsi qu'il faut dire que l'unité en question est incomplète en ce qui a trait aux diverses dimensions du processus de formation des concepts; c'est pourquoi, elle doit être complétée par des activités appropriées faisant ressortir davantage les variabilités possibles de représentants pour un concept donné. De telles activités sont prévues pour de futures unités et elles nécessiteraient sans doute un changement d'approche. Il s'avère donc nécessaire que des travaux de recherche en apprentissage soient menés afin d'éclairer davantage le processus de la formation de concepts géométriques et cela, tant dans sa teneur intensive qu'extensive.

7.2 Moyens d'évaluation: problématique et intentions

Dans le but d'obtenir une évaluation plus objective de l'efficacité de l'unité d'enseignement, en ce qui a trait à la formation des concepts et à la représentation spatiale des formes géométriques retenues, nous avons voulu intégrer dans l'unité des instruments qui nous permettent de vérifier un changement d'attitude intellectuelle chez l'apprenant impliqué dans une situation d'apprentissage faisant intervenir des objets concrets

de forme polyèdrale. Pour cela, avons-nous fait précéder le diaporama d'une séance d'exploration stimulée par une série de questions sous forme de fiches. Cette séance avait pour but, d'une part, de familiariser les enfants avec le contexte conceptuel et, d'autre part, de nous fournir quelques données factuelles quant au degré de familiarité des enfants avec le contexte polyèdres. Une séance semblable prévue à la fin de l'unité devait permettre, à nous d'abord, aux enfants eux-mêmes, puis, aux maîtres-utilisateurs, de noter un changement de conception de la situation, cela grâce aux diverses activités d'apprentissage contenues dans l'unité. Il faut dire que c'est dans l'esprit du processus de la rationalisation des interventions didactiques, c'est-à-dire, dans l'intention d'en faire une première expérimentation pour pouvoir l'améliorer par la suite en tenant compte des résultats empiriques obtenus que nous avons tenté d'aborder ce problème d'évaluation.

Pour assurer son intégration harmonieuse dans l'unité, nous avons voulu que le questionnaire prenne la forme d'une série de fiches d'exploration plutôt que celle d'un instrument scientifique développé pour la mesure. Il s'insère alors de façon naturelle dans l'introduction de l'unité; sa répétition à la fin de l'unité, par contre, peut paraître artificielle aux enfants et aux enseignants qui sont d'ailleurs peu disposés à s'y soumettre. D'où l'avantage de varier les questions de ce dernier pour motiver davantage les élèves et les enseignants à se soumettre à cette sorte d'activité. Varier les questions tout en conservant le <u>type</u> de questions afin de permettre une comparaison signifiante

des résultats. Nous avons d'ailleurs déjà commencé ce processus d'adaptation. Les questionnaires contiennent trois différents types de stimuli qui visent à provoquer, de la part des enfants, des réactions révélatrices de leur conception de la situation géométrique retenue.

Des questions de la séance exploratoire invitent l'enfant à faire une discrimination globale des objets géométriques concrets, à savoir, l'identification de blocs particulièrement connus (question I) ainsi que la formation et caractérisation de collections de blocs qui se ressemblent (question II). Par ces questions, nous voulions savoir, si, dans l'ensemble des blocs, l'enfant reconnaîtrait des objets géométriques déjà rencontrés ou certains objets connus de son environnement réel. De plus, nous espérions pouvoir indiquer par là, quelles propriétés géométriques plus ou moins précises il utiliserait spontanément pour distinguer les blocs ou regrouper les blocs. Ces mêmes questions soumises aux enfants, après le diaporama, tentaient plutôt de faire ressortir l'impact de l'unité d'enseignement sur l'application du vocabulaire d'abord, puis, sur la reconnaissance de propriétés et concepts introduits par l'unité et, finalement sur la familiarisation acquise par l'enfant pour de telles formes géométriques. C'est ainsi que pour mieux mesurer cet impact, nous avons consenti à élargir la question II par l'ajout des questions III et IV escomptant par là, d'une part, mieux identifier des blocs voire même des notions (demeurés jusque là étrangers à l'enfant) et pouvoir, d'autre part, spécifier quelles propriétés géométriques l'enfant choisit spontanément pour caractériser l'univers qui lui a été soumis pour cette expérience d'apprentissage.

La question III de la séance exploratoire à laquelle correspond la question VI des fiches post-expérience stimule la comparaison de deux blocs donnés. Ces deux questions peuvent nous fournir des indications intéressantes concernant l'aptitude des enfants à reconnaître des propriétés géométriques précises tant comme propriété commune (invariant) que comme propriété de différence (variable) entre deux blocs. La comparaison des résultats pour ces deux questions pourrait, par la suite, nous donner des indices de l'accroissement, par l'unité, de cette capacité d'associer ou de différencier chez l'enfant. Pour motiver davantage les enfants, nous avons dans les fiches post-expérience, varié les paires de blocs à comparer. Cette légère modification ne devrait pas influencer de façon significative le traitement de cette question par l'enfant non plus que d'en réduire le degré de comparabilité avec la question III de la séance exploratoire.

La question IV de la séance exploratoire qui est identique à la question VI du questionnaire post-expérience est l'activité à laquelle les enfants s'adonnent le plus volontiers. Elle avait pour objectif de nous fournir des indications concernant la représentation spatiale des enfants. Elle s'est évidemment heurtée au problème qu'ont les jeunes enfants de représenter par dessin l'image d'un bloc donné. Cependant, les renseignements qu'elle nous livre sont très précieux. Les enfants choisissent de dessiner ou bien des blocs qui leur sont plus familiers ou bien ceux qu'ils estiment plus faciles à dessiner. De plus, les dessins nous révèlent si l'enfant est davantage enclin à faire

une représentation tri-dimensionnelle du bloc après l'expérience d'apprentissage qu'avant. Enfin, c'est dans l'espoir d'y déceler des indices importants en ce qui a trait aux manifestations de la conception spatiale chez l'enfant que nous avons exploré cette question.

7.3 Résultats et commentaires

Voici les résultats, leur comparaison ainsi que quelques commentaires relatifs a chacune des questions de la séance exploratoire ainsi que de la (ou des) question(s) correspondante(s) de l'activité post-expérience. Pour des fins pratiques, nous identifierons ces deux séances d'activités, respectivement par les questionnaires A et B. (cf. Annexe 3).

7.3.1 Discrimination globale

7.3.1.1 Question I

Cette question est identique dans les questionnaires A et B. Elle est formulée comme suit:

> Observe tous tes blocs. Parmi eux, y en a-t-il qui te font penser à des objets connus?
>
> Donne-leur un nom.

Termes relatifs à:	Questionnaire A	Questionnaire B
a) l'espace	cube, pyramide	cube, pyramide prisme
b) au plan	--------	trapèze
c) la vie courante	31 appellations différentes (cf. Annexe 2)	46 appellations différentes (cf. Annexe 2)

Tableau 1: Résultats de la question I

On pourrait croire, d'après ces résultats, que le diaporama n'a nullement enrichi le vocabulaire des enfants relativement à la géométrie tri-dimensionnelle. En effet, il appert que les enfants soient restés intuitifs et créatifs malgré l'expérience du diaporama. Même, la variété des appellations imaginatives est plus grande dans le questionnaire B que dans le questionnaire A (15 appellations de plus).

Il peut paraître étonnant que, dans le questionnaire B, les enfants ne se soient pas servis d'appellations géométriques pour désigner les blocs. Rappelons d'abord que le libellé de la question prêtait ou donnait lieu à ce genre de réponses intuitives.

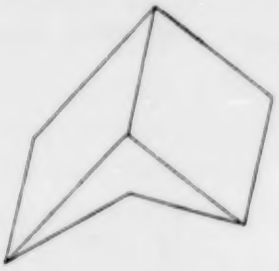
De plus, pour l'enfant, parce qu'encore à l'état de germe, le concept abstrait n'est pas suffisamment développé pour pouvoir dominer sur l'apparence réelle du monde qui l'environne. En effet, le bloc C n'est pas pour l'enfant une forme abstraite qui s'appelle tétraèdre régulier. Le bloc C est plutôt un objet réel (tente) à partir duquel l'enfant va devoir se créer une image mentale.

Ces quelques commentaires (et analyses) pourraient laisser supposer qu'il serait souhaitable que l'enfant voie, dans les objets réels, des concepts abstraits. Or, nous ne croyons pas qu'il faille réduire la perception de l'apprenant à une seule lecture. Au contraire, un des rôles de l'enseignement de la géométrie n'est-il pas d'enrichir le pouvoir de perception chez l'enfant plutôt que de le réduire? Et pour cela, par des moyens appropriés, de stimuler chez lui ce processus d'abstraction ou de construction mentale. Mais un tel processus ne peut être mis en branle que s'y l'apprenant s'y implique de façon active et engagée, ce qui suppose nécessairement une motivation intrinsèque qui fait se déployer en lui une "énergie spirituelle qui attise l'effort" (Lemay, F. 1979, p. 6), stimule la poursuite et commande le succès.

L'expérimentation nous a confirmé que, pour l'enfant, la perception visuelle est un facteur important d'appréhension du réel. Aussi, la position spatiale du polyèdre, au moment où l'enfant l'observe, est déterminante dans l'association qu'il fait du bloc avec un objet connu de son environnement.

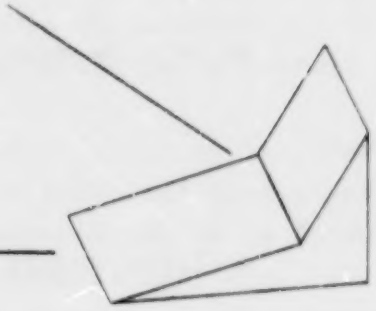
Prenons comme exemple le bloc G. Selon la position que l'enfant lui donne, il peut lui faire jouer les rôles successifs:

- d'un tunnel (pont):



- d'une console d'ordinateur:

- d'un soulier:



- d'une chaise longue:

- d'un boomerang:

Il en est de même du bloc T que les enfants associent à:

- un pont couvert:

- la tour de Pise:

- un banc de parc:

- un livre ouvert:

- un "badge":

Dans le cas du "boomerang" pour G comme dans celui du "badge" pour T, l'enfant, par une abstraction mentale de sa perception, réduit le bloc à un être bi-dimensionnel en ne considérant la forme que d'une seule face.

G

T

Ainsi l'ensemble des différences perceptives d'un enfant relativement à un polyèdre particulier peut-il donner lieu à un ensemble d'états différents engendrés par une action comme celle de "rètourner le bloc", "faire pivoter le bloc". Serions-nous ici, sur la voie d'un groupement engendré par l'enfant pour appréhender un objet de l'environnement en agissant sur lui de façon à épuiser son potentiel de variabilité perceptive. Peut-être l'enfant devra-t-il acquérir une certaine maîtrise de ce groupement avant de pouvoir découvrir aisément l'invariant de cet ensemble d'états qui est la forme du bloc donné. Pédagogiquement parlant, ne devrions-nous pas proposer l'exploration de la forme avant de prétendre faire découvrir la conservation de la forme?

Ce processus d'abstraction "conservation de la forme" n'est pas nécessairement complet et stabilisé chez l'enfant, même après des exercices d'exploration de la forme. Ce n'est que très lentement et progressivement que l'enfant, à partir de ce qui varie, en arrivera à découvrir l'invariant. En effet, l'expérience et l'observation d'enfants nous montrent que devant un univers jusque là inconnu pour lui, l'enfant semble à priori très sensible à ce qui différencie les objets de cet environnement. Après un temps plus ou moins long d'apprivoisement et d'exploration de cet univers l'enfant se sensibilise peu à peu avec les ressemblances entre deux objets ou plusieurs objets. Il devient capable de reconnaître les invariants. L'avancement de la connaissance d'un environnement chez un enfant peut se mesurer à son aptitude à le structurer à partir d'invariants pertinents.

7.3.1.2 Question II

La question II est la même dans les deux questionnaires:

> Mets ensembles les blocs qui te paraissent se ressembler. Ecris leur lettre dans une patate et, dans l'étiquette, écris pourquoi ces blocs vont ensemble.

Cependant, le domaine de la discrimination globale a été élargi dans le questionnaire B par deux nouvelles questions à savoir:

(Questionnaire B: question III)

> Y a-t-il des blocs que tu ne connais pas du tout? Si oui, écris la lettre de ces blocs dans l'espace ci-après.

(Questionnaire B: question IV)

> Essaie de trouver une ou plusieurs propriétés communes à tous les blocs que tu as devant toi.

Nous traiterons d'abord la question commune aux questionnaires A et B. Par la suite, nous commenterons les

deux questions d'élargissement du questionnaire B.

a) Régularité

Cette propriété n'est pas perçue de façon explicite par les enfants lors du questionnaire A. Nous en pressentons cependant l'existence (54%) dans une expression naïve mais révélatrice de l'intuition du concept: "ressemblent à des boules".

Cette manifestation nous semble pouvoir être interprétée comme critère de régularité. Cependant, il est évident que ce critère n'est pas suffisamment précis puisque les enfants n'y incluent jamais le cube et le tétraèdre.

Au questionnaire B, 40% des élèves ont gardé la notion intuitive adoptée au questionnaire A tandis que 12% ont dépassé ce stade pour s'engager dans une voie plus formelle et cela est clairement indiqué ou bien par l'emploi du terme global "semi-régulier" ou bien par l'énumération des conditions de la semi-régularité, à savoir: faces régulières et sommets de même degré.

Connaissant mieux la voie d'approche naturelle et spontanée du concept de régularité

par les enfants à savoir "polyèdre inscritible dans une sphère" (introduit par "ressemblent à des boules"), serait-il opportun, dans une unité d'enseignement ultérieure, d'emprunter cette voie? Or, nous savons pertinemment ce que cette option recèle de difficultés pour de jeunes enfants. De plus, nous sommes bien conscients qu'il existe un très grand écart entre une connaissance intuitive et sa formalisation mathématique, laquelle réclame beaucoup de maturité.

b) Pyramide

Les enfants sont sensibles aux formes qui "ont des pointus". En effet, au questionnaire A, 56% des élèves ont ainsi identifié la plupart des pyramides du référentiel soumis à leurs investigations. Cette proportion s'est accrue lors du questionnaire B puisque 84% des enfants caractérisent le sous-ensemble des pyramides, non seulement d'une façon familière et intuitive par les expressions "ressemblent à des tentes, à des pointus", mais par le terme précis "pyramide" ou encore par la définition même (apex, base, faces latérales) de la pyramide.

c) Formes des faces

Timidement exploitée au questionnaire A (24%), cette propriété de la "forme des faces" est limitée à trois types bien connus de polygones: carré, triangle, rectangle.

Au questionnaire B, 40% des élèves remarquent la variété des formes des faces des polyèdres et utilisent à bon escient le terme propre pour désigner tel n-gone.

d) Nombre de faces

Le nombre de faces, quoiqu'il puisse nous paraître facile à identifier, n'a pas été naturellement (20%) retenu par les enfants dans un premier contact avec les polyèdres. Au questionnaire B, par contre, 62% des enfants s'en servent comme propriété discriminatoire dans l'ensemble des polyèdres. Il va sans dire que les polyèdres à six faces (hexaèdres) sont privilégiés à cause de l'importance particulière que leur accordait le diaporama.

e) Parallélisme

i) parallélisme de faces:

Cette propriété non plus que celle de la

régularité n'est retenue de façon explicite par les enfants au questionnaire A. Mais là encore, nous croyons que quelques rares enfants (8%) en pressentent déjà l'existence. Ils le manifestent dans des expressions très vagues comme: "ressemblent à des wagons", "sont plats".

Au questionnaire B, 28% des enfants font appel à cette propriété pour discriminer les polyèdres et cela en des termes variés, en général, plus précis qu'avant l'unité.

ii) parallélisme d'arêtes:

De la même façon que pour le parallélisme de faces, les enfants ne font allusion au parallélisme d'arêtes qu'en des termes très vagues et intuitifs: "ressemblent à des effaces", "ressemblent à des cheminés", "sont allongés". Le questionnaire B ne révèle aucune amélioration sensible dans ce contexte. Au contraire, moins nombreux sont les enfants (8% au questionnaire B contre 24% au questionnaire A) qui en font mention.

En comparant i) et ii), on est amené à penser que les enfants, après le diaporama, semblent plus sensibles au parallélisme de faces qu'au parallélisme d'arêtes. Faut-il s'en étonner puisque pour aborder la notion

de prisme, les enfants ont dû d'abord se sensibiliser à l'existence de paires de faces parallèles dans un polyèdre. De plus, le concept de "faces" ne fait-il pas appel à une réalité plus manifeste, plus facilement palpable sur les blocs que celui d'"arêtes" que l'enfant doit reconnaître comme la rencontre de deux faces?

f) Prisme

Le concept de prisme, faut-il s'en étonner, est absent dans les critères de classification utilisés au questionnaire A. Il apparaît, nettement et en des termes précis chez 42% des enfants soumis au questionnaire B. Ce que l'enfant a encore du mal à réaliser, malgré l'étude qu'il a faite de la notion de prisme dans le diaporama, c'est le P.G.E. (plus grand ensemble) associé à la notion de prisme. Il nous a semblé que l'enfant a encore beaucoup de difficultés à distinguer de façon globale, un prisme d'un non-prisme. Il est clair qu'un premier contact avec cette notion ne suffit pas à la stabilisation du concept. Il faudra, certes, plusieurs autres séances d'approfondissement variées et stimulantes afin de poursuivre et de parfaire cet apprentissage à peine amorcé.

g) Angles

Lors de l'administration du questionnaire A, quelques enfants (24%), sans doute parce qu'ils avaient étudié cette notion en classe auparavant, ont tenté de regrouper des polyèdres selon les angles apparaissant sur les faces. Pour cela, ils ont surtout essayé de regrouper les polyèdres dont les faces présentaient des angles droits. Au questionnaire B, par contre, ils ont tout à fait négligé ce critère qui ne leur apparaissait plus pertinent.

h) Droit

C'est l'absence de cette propriété chez certains polyèdres qui a retenu l'attention de quelques enfants (14%) tant au questionnaire A qu'au questionnaire B. La manifestation de la reconnaissance du critère "non-droit" s'est révélée dans le qualificatif "penché". A cet égard, les résultats des questionnaires A et B sont à peu près les mêmes: aucune amélioration, voire même une régression après le diaporama (6%).

Quant aux questions d'élargissement de la discrimination globale dont il a été fait mention en page 78, nous en rappelons maintenant l'objet en même temps que nous en communiquons les résultats.

La question III (questionnaire B) nous indique quels sont les polyèdres qui, pour les enfants, semblent "étrangers" ou inconnus. C'est le bloc Z

qui est le plus souvent signalé (40% des enfants le mentionnent). Pourtant, c'est ce même bloc qui avait fasciné les enfants lors de la séance exploratoire et ils ne manquaient pas d'imagination pour lui trouver un nom: "banc de cirque", "banc d'éléphant", "tabouret", "abat-jour", "jupe", "montagne", "volcan", etc..

D'autres blocs sont aussi signalés très souvent (36% des enfants les mentionnent comme blocs étrangers, ou inconnus). Ce sont les blocs: W, V, U, X qu'on avait regroupés très souvent dans les exercices de classification à cause de leur parenté avec la sphère ("ressemblent à des boules").

De la cueillette de ces résultats, il ressort également une constante importante à signaler. Les seuls blocs qui ne figurent jamais dans la liste des blocs étrangers sont le bloc N (cube) et les blocs B, C, E, F (pyramides). Ces données correspondent très bien aux deux seuls types de polyèdres connus ou signalés par les enfants lors de la séance exploratoire précédant le diaporama (cf. p. 73).

La question IV (questionnaire B) fait ressortir la propriété commune à tous les blocs. Celle que les enfants signalent majoritairement, faut-il s'en étonner est la propriété de "polyèdres" (52%). Voici, dans

l'ordre de leur taux d'apparition, les autres propriétés mentionnées:

- sont constitués d'arêtes (22%)
- ont au moins 4 faces (22%)
- sont constitués de faces planes (16%)
- sont faits de faces (14%)
- ont des sommets (10%)
- ont au moins 1 sommet (8%)
- chaque face a au moins 3 côtés (8%)

Ce qui frappe, en relevant les propriétés retenues pour qualifier cet univers de 26 blocs, c'est le fait qu'ici, les enfants ont su puiser dans leurs connaissances nouvellement acquises par le truchement du diaporama pour caractériser l'ensemble, soit globalement par la propriété spécifique "polyèdre", soit plus analytiquement par des propriétés constituantes (faces, arêtes, sommets).

7.3.2 Comparaison de blocs

Ce thème est exploité à la question III du questionnaire A et à la question V du questionnaire B. Comme nous l'avons justifié plus haut, seules les paires de blocs à comparer varient d'un questionnaire à l'autre. Voici l'énoncé de cette question:

> Dans le tableau qui suit, considère les blocs que nous te présentons et trouve ce qu'ils ont de pareil et ce qu'ils ont de différent.

Après s'être appliqué à regrouper des ensembles de polyèdres à cause d'une propriété commune, l'enfant est maintenant invité à raffiner son observation en considérant deux polyèdres à la fois pour y découvrir tout ce que ces deux blocs ont de "pareil" (invariants) et tout ce qu'ils ont de "pas pareil" (variants). Sera-t-il plus sensible à ce qui varie d'un bloc à l'autre ou remarquera-t-il davantage ce qui ne change pas, ce qui demeure invariant? Certaines propriétés seraient-elles plus facilement reconnaissables que d'autres par l'enfant? Les résultats recueillis au questionnaire B accusent-ils un progrès sur ceux obtenus au questionnaire A.

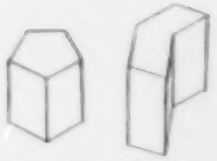
Avant de répondre à ces questions, nous allons d'abord, pour chaque paire de polyèdres proposés à l'observation des enfants tant au questionnaire A qu'au questionnaire B, indiquer le pourcentage des réponses qui coïncident avec les "variants" et "invariants" qui existent entre les deux blocs donnés. Pour des fins de clarté, nous négligerons de rapporter ici toute la gamme des variables signalées par les enfants à chaque exercice proposé.

Voici, en regard de chaque paire de blocs soumise à leur observation, le pourcentage des enfants qui ont reconnu le "variant" ou l'"invariant" approprié.

Paires de blocs	"VARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance	"INVARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance
B D	Convexité	66	Pyramide No. de faces (6) No. de sommets No. d'arêtes Non droit	28 54 0 12 0
D T	No. de faces Formes des faces Prisme Pyramide	50 38 0 2	Non droit Non convexité	6 70
C S	Pyramide No. de faces No. d'arêtes	28 56 0	Régularité Droit Convexité Formes des faces (triangles)	0 0 18 54
N I	Régularité Droit Angles droits Formes des faces Faces congrues	0 8 10 48 0	Prisme Droit Hexaèdre No. de faces No. de sommets No. d'arêtes Convexité	0 0 40 36 8 8 0

Paires de blocs	"VARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance	"INVARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance
E A	Droit	0	Pyramide	50
	No. d'arêtes	0	Convexité	18
	No. de faces	48	Base régulière	0
	No. de sommets	8		
	Polygone de base	22		
F E	Droit	40	Pyramide	20
			No. d'arêtes	0
			No. de faces	50
			No. de sommets	8
			Convexité	8

Tableau 2: Résultats de la question III du questionnaire A

Paire de blocs	"VARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance	"INVARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance
B D	Convexité	52	Pyramide Hexaèdre No. de faces Non droit No. de sommets No. d'arêtes	74% 2% 22% 0% 0% 12%
G N	Convexité No. de paires de parallèles Formes des faces Régularité	20 8 16 4	Prisme Droit Hexaèdre No. de faces No. de sommets No. d'arêtes	10 0 12 32 4 8
P T 	Convexité Droit No. d'arêtes No. de faces No. de sommets	10 4 8 58 6	Prisme	10
A F	No. de faces No. d'arêtes Polygone de base Droit Degré de l'Apex	52 16 18 4 8	Pyramide Convexité	76 2

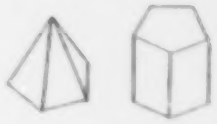
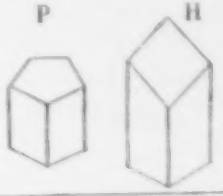
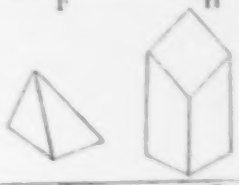
Paire de blocs	"VARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance	"INVARIANTS"	Pourcentage (%) de reconnaissance
A P 	Pyramide Prisme No. de faces No. d'arêtes No. de sommets	28 6 30 8 8	Convexité Droit Base pentagonale	6 0 48
P H 	Prisme No. d'arêtes No. de faces No. de sommets	2 6 58 6	Convexité	14
F H 	Pyramide No. d'arêtes No. de faces No. de sommets	34 14 26 8	Convexité	10
N C	Pyramide Hexaèdre (cube) Prisme No. d'arêtes No. de faces No. de sommets Formes des faces	26 6 8 8 28 4 26	Semi-régulier Faces congrues et rég. Convexité Droit	4 18 10 10 0
O P	No. d'arêtes No. de faces No. de sommets Droit	16 48 6 10	Convexité Prisme	4 16

Tableau 3: Résultats de la question V du questionnaire B

Pour mieux percevoir, d'une part, les écarts entre les résultats des questionnaires A et B relativement à une propriété apparaissant comme "variant" ou bien figurant comme "invariant", et, d'autre part, pour détecter si, en regard de telle propriété, l'enfant semble plus sensible à la reconnaître, lorsqu'elle varie d'un bloc à l'autre ("variant") ou lorsqu'elle demeure constante ("invariant"), nous avons cherché à établir les moyennes des taux de reconnaissance de chacune des propriétés figurant dans l'une ou l'autre des cases des tableaux 2 et 3.

PROPRIETES	"VARIANTS"		"INVARIANTS"	
	A	B	A	B
Convexité	66%	27%	23%	8%
No de faces	51%	43%	43%	29%
Forme des faces	43%	21%	54%	--
Pyramide	15%	44%	49%	75%
Prisme	0%	5%	0%	12%
Hexaèdre	50%	40%	65%	34%
No de sommets	8%	6%	5%	2%
No d'arêtes	0%	11%	6%	10%
Droit	16%	6%	2%	0%
Régularité	0%	2%	0%	11%

Tableau 4: Comparaison des résultats des questions III (questionnaire A) et V (questionnaire B)

Nous rapporterons maintenant les résultats dans des diagrammes et nous tenterons, pour chaque propriété, d'en dégager certaines significations ou interrogations.

Rappelons d'abord que les nombres qui figurent dans les cases de ces diagrammes (ils sont tirés du tableau 4) doivent être perçus comme des indicateurs d'une tendance plutôt que comme des mesures précises tirées d'une analyse scientifique des données. (Dans cette optique, les taux ont été délibérément arrondis à l'unité la plus près).

a) Convexité:

	A	B
Variant	66	27
Invariant	23	8

Tableau 5.1

1) Variant-Invariant

Il semble que la convexité soit plus facilement reconnue, tant au questionnaire A qu'au questionnaire B, au niveau du "variant". L'enfant semble souvent frappé par la non-convexité plutôt que par la convexité. Ex. Alors que pour la paire {N, I} (tableau 2 p. 88) on obtient 0% de reconnaissance de la convexité comme invariant, 70% des enfants signalent l'invariant "non-convexité" pour les blocs de la paire {D, T} (tableau 2 p. 88).

2) A versus B

A quoi attribuer cette régression de reconnaissance au niveau du questionnaire B. Le diaporama serait-il

venu distraire de cette propriété simple, naturelle à l'enfant pour attirer son attention sur des propriétés plus complexes comme celles de prisme et de semi-régulier?

b) Nombre de faces:

1) Variant-Invariant

	A	B
Variant	51	43
Invariant	43	29

Tableau 5.2

Le nombre de faces, comme la convexité, semblent plus souvent reconnues au niveau du "variant" que de l'invariant.

2) A versus B

Cette propriété simple et naturelle à l'enfant a peut-être, elle aussi, été un peu étouffée par l'accumulation des nouvelles données dans le diaporama.

c) Forme des faces:

1) Variant-Invariant

	A	B
Variant	43	21
Invariant	54	--

Tableau 5.3

Ici, contrairement aux propriétés de convexité et du nombre de faces, l'enfant est davantage attiré par des formes de faces qui ne varient pas. Ex. {C, S} (tableau 2 p. 88). Il est plausible de croire que si le questionnaire B avait présenté deux blocs dont la forme des faces était invariante, (ce qui n'est pas le cas), les enfants, en nombre assez imposant, auraient signalé l'invariant en question.

2) A versus B

Ici, l'effet du diaporama sur la sensibilisation de

l'enfant à la forme des faces n'apparaît pas comme telle parce que les résultats enregistrés pour fins de compilation ont fait abstraction de l'ampleur ou de la diversité des formes signalées par les enfants, pour ne tenir compte que du fait que l'enfant signalait la variable "formes des faces". Or, une analyse plus fine révélerait que, alors qu'avant l'unité, les seules formes de faces signalées étaient: carré, triangle, rectangle, après, par contre, la liste est beaucoup plus étendue: carré, triangle, rectangle, parallélogramme, trapèze, quadrilatère, pentagone, hexagone.

d) Pyramide:

1) Variant-Invariant

Les enfants remarquent naturellement l'invariant pyramide dès le questionnaire A. Cette propriété, quoique non simple, ne leur est pas étrangère: ils en ont au moins une notion intuitive.

	A	P
variant	15	44
invariant	49	75

Tableau 5.4

2) A versus B

L'effet du diaporama sur l'apprentissage de cette notion semble assez net et se passe de commentaires.

e) Prisme:

	A	B
variant	0	5
invariant	0	12

Tableau 5.5

1) Variant-Invariant

Il semble que l'enfant aurait tendance à privilégier l'invariant prisme. Le nombre limité des réponses ne nous permet pas de pousser plus loin la conjecture.

2) A versus B

Il est clair que, contrairement à la notion de pyramide, celle de prisme était tout à fait étrangère à l'enfant avant le diaporama. Et malgré une leçon entière consacrée à l'étude de ce concept par l'enfant, les résultats marqués par rapport à la séance exploratoire, quoique peu élevés en comparaison avec d'autres notions, nous incitent à croire que l'apprentissage est démarré dans ce domaine.

f) Hexaèdre:

	A	B
Variant	50	40
Invariant	65	34

Tableau 5.6

N.B. Les résultats figurant ici, ont dû être légèrement aménagés i.e. sous-tirés des résultats de la variable "nombre de faces", cela chaque fois que les enfants faisaient mention de "6 faces". Il va sans dire qu'avant le diaporama, les enfants ne connaissaient pas le terme. Pourtant, dès ce moment, ils savaient reconnaître qu'un polyèdre donné avait 6 faces (côtés). Pour cela, nous avons compilé ces données sous le critère "hexaèdres" aussi bien que sous celui de "nombre de faces".

1) Variant-Invariant

La dominance pour l'invariant au questionnaire A est déplacée en faveur du variant au questionnaire B. Cela s'explique peut-être par le fait que dans les paires de blocs soumises à l'étude des enfants, cinq d'entre elles présentaient l'hexaèdre en tant que "variable" alors que deux seulement le présentaient comme invariant.

2) A versus B

Malgré la décroissance horizontale apparaissant dans le diagramme, nous ne pouvons déduire que le diaporama a affaibli la notion d'hexaèdre chez l'enfant.

Cette notion n'a présenté pour lui aucune difficulté. Peut-être, à la suite de l'unité, a-t-il été enclin à lui accorder moins d'importance qu'à une autre notion plus complexe avec laquelle il venait de se familiariser.

g) Nombre de sommets:

	A	B
Variant	8	6
Invariant	5	2

Tableau 5.7

L'enfant semble accorder plus d'attention à la variété qu'à l'invariance du nombre de sommets. Le diaporama a davantage insisté sur le degré des sommets que sur le nombre de sommets.

h) Nombre d'arêtes:

	A	B
Variant	0	11
Invariant	6	10

Tableau 5.8

Cette caractéristique a pris indirectement de l'importance avec le diaporama car l'enfant a eu à compter maintes fois le nombre d'arêtes aboutissant à un sommet pour déterminer le degré de celui-ci.

i) Droit:

	A	B
Variant	16	6
Invariant	1.5	0

Tableau 5.9

1) Variant-Invariant

Ce n'est que lorsque l'enfant est en présence du "non-droit" (penché) par opposition au "droit" qu'il semble intuitionner de façon toute naturelle la présence de ce concept. C'est donc en tant que variant qu'il le signale:

{F, E} (tableau 2 p. 89) et

{O, P} (tableau 3 p. 91),

mais rarement en tant qu'invariant à moins que les deux polyèdres ne soient non-droits:

{D, T} (tableau 2 p. 88).

2) A versus B

Le diaporama n'a pas développé cette intuition.

j) Régularité:

	A	B
Variant	0	2
Invariant	0	11

Tableau 5.10

1) Variant-Invariant

Le questionnaire B nous laisse soupçonner que l'enfant, une fois le concept plus stable, serait porté à détecter sa présence à travers l'invariant plutôt que le variant. La question II nous avait laissé présager un peu ce résultat par la forte proportion d'enfants qui regroupaient naturellement les polyèdres qui ressemblaient à des "boules."

2) A versus B

Comme le concept de prisme, celui de régularité semblait tout à fait absent chez l'enfant avant le diaporama. De même que pour la notion prisme, une première confrontation avec cette réalité mathématique complexe est nettement insuffisante pour assurer une certaine aisance et stabilité du concept chez l'enfant. Il devient intéressant de comparer, à cet égard, les tableaux 5.5 et 5.10.

En résumé, l'on peut dire que les concepts de pyramide et d'hexaèdre, déjà présents à l'état intuitif chez l'enfant, ont été renforcés et davantage structurés par le moyen du diaporama; et cela indépendamment des résultats numériques relevant de l'analyse de la question III lesquels ne mettent pas suffisamment en lumière cet approfondissement par l'enfant. Ce défaut de manifestation est sans doute dû, d'une part, à la variation des conditions d'application des deux questionnaires: même type de questions mais choix de paires de blocs différentes en nombre (neuf au lieu de six) et en subtilité: Ex. La paire {N, C} du questionnaire B est plus difficile à analyser au niveau des invariants que toute autre paire soumise au questionnaire A. Il en est de même des paires: {P, H} , {P, T} , etc.. D'autre part, la fatigue éprouvée pa les enfants lors de l'administration du questionnaire B, peut en avoir affecté les résultats.

Quant aux concepts de prisme et de semi-régulier, ils n'ont été que mis en "dégel" par la dite unité d'enseignement. Là encore et pour les mêmes raisons, quoique de façon moins apparente, les résultats numériques fournis ici nous semblent en deça de ce que l'enfant a semblé découvrir des concepts sus-mentionnés.

Il serait très intéressant de pousser des recherches plus rigoureusement contrôlées pour détecter plus précisément la tendance naturelle à discriminer à partir des propriétés variantes ou invariantes dans un contexte géométrique donné. De même, il semblerait avantageux de pouvoir mesurer l'impact ou l'efficacité d'une intervention didactique sur le taux de reconnaissance des variants par rapport à celui des invariants dans un contexte bien précis.

7.3.3 Représentation spatiale

Ce thème est exploité à la question IV du questionnaire A et à la question VI du questionnaire B. La question proposée aux enfants se formule ainsi:

> Si tu en as le goût, fais le dessin de quelques blocs de ton choix.

Rappelons brièvement que cette activité avait comme but, d'une part, de présenter à l'enfant une activité libre et stimulante sur le plan de la communication écrite de sa perception spatiale et d'autre part, de nous fournir certaines données en ce qui a trait à la formulation d'hypothèses pertinentes relativement au développement de la perception spatiale chez l'enfant de même qu'à sa représentation.

Les enfants ont, de fait, été très stimulés par cette activité libre. Les polyèdres sont choisis tantôt parce qu'ils plaisent davantage, tantôt à cause de leur forme inaccoutumée. Voici le tableau du taux de représentation de chaque bloc.

Blocs	Fréquence du choix des Blocs (1)	
	A	B
N(1)	72	74
Q	42	38
M	28	24
G	20	8
P	14	32
C	10	16
H	10	2
F	8	0
I	8	20
S	8	4
W	8	0
R	6	0
T	4	8
O	4	6
E	2	12
U	2	0
A	2	10
Y	0	2
Z	0	2
X,V,L,K,J,D,B,	0	0

Tableau 6: Choix des blocs dessinés

(1) En général, la représentation du bloc N (le cube) est très bien réussie; il semble qu'elle soit un acquis scolaire, une représentation dont on a fait l'apprentissage déjà.

Nous aurions beaucoup à dire sur les attitudes des enfants qui essaient de dessiner des blocs: la position dans laquelle ils fixent le bloc avant de le dessiner, l'angle sous lequel ils se placent pour l'observer, les changements de position qu'ils font subir au bloc pendant qu'ils le dessinent afin de revoir ses faces cachées, l'initiative d'approcher le bloc de la feuille de papier afin de pouvoir décalquer le contour de l'une ou l'autre de ses faces; voilà autant de comportements qu'il serait important de considérer pour faire une analyse plus poussée du développement de la représentation spatiale chez l'enfant.

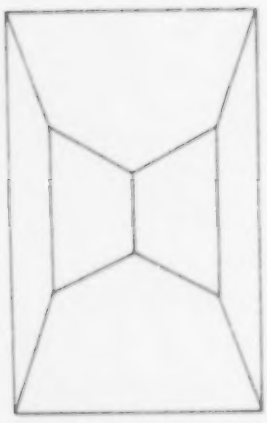
L'observation et l'étude des dessins des enfants nous ont incités à pousser plus loin notre investigation dans le domaine de la représentation spatiale. Les objets tri-dimensionnels peuvent, en effet, au niveau de la représentation s'organiser ou se subdiviser en trois classes:

celle de la représentation en perspective de l'objet,

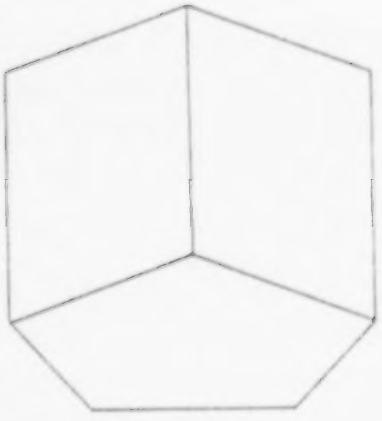
celle de la représentation topologique de l'objet,

celle de la représentation à plat (ou développé planaire).

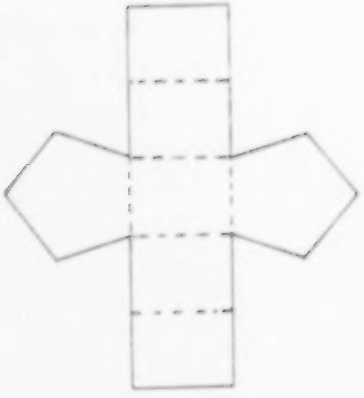
Voici, du bloc P, un représentant de chacune de ces trois catégories de représentation:



(topologique)



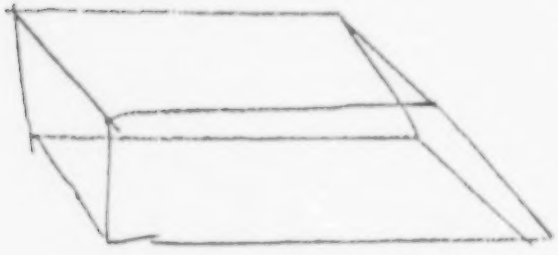
(perspective)



(développé planaire)

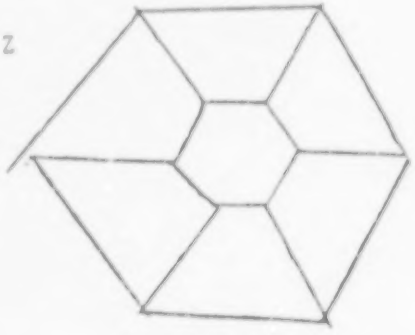
Que fait l'apprenant par rapport à ces trois formes de représentation? Chez les enfants auprès desquels nous avons travaillé, nous avons constaté une volonté de représenter la 3e dimension, mais cette volonté n'engendre pas nécessairement la capacité de communiquer par un dessin ce qui est perçu. Nous avons aussi constaté que l'enfant fait souvent un "mixage" de ces formes de représentation; en voici un exemple tiré d'une copie d'un enfant de 9 ans:

bloc M



(perspective)

bloc Z



(topologique)

Tout ce que nous avons dit plus haut concernant la représentation spatiale nous confirme bien que "la connaissance est une interaction entre le sujet et l'objet" (Bringuier, J.C., 1979, p. 38), en l'occurrence, les polyèdres.

Le domaine de la représentation spatiale chez l'enfant ferait, à lui seul, l'objet d'une importante recherche. En conclusion de ce travail, nous tenterons d'en circonscrire certaines approches possibles.

8. APERCU SYNTHETIQUE DES RESULTATS ET PROSPECTIVES

Les travaux de réalisation de l'unité d'enseignement Polyèdres représentent pour nous une exploration d'un domaine conceptuel peu exploité à des fins d'enseignement au niveau du deuxième cycle du primaire. Tel que mentionné en introduction, cette exploration a été guidée par le modèle du processus de la rationalisation des interventions didactiques tant par rapport à sa méthodologie qu'à son esprit de création progressive. C'est ainsi que nous considérons les résultats obtenus non pas en tant que produit achevé mais bien plutôt comme une nouvelle voie ouverte dans un champ d'activités didactiques très diversifiées, potentiellement riches et prometteuses de retombées positives sur l'enseignement de la géométrie au primaire.

Signalons d'abord que le domaine conceptuel comme tel se prête bien à l'enseignement au primaire, et de par la variété des concepts qu'il sous-tend, et de par les variations d'approfondissement qu'il suggère. Aussi, ce domaine est-il non seulement proche de l'environnement réel de l'enfant, mais encore peut-il l'enrichir ou le complémenter.

Les activités d'apprentissage qui peuvent être conçues dans ce domaine permettent d'y intégrer toute une variété de principes didactiques, d'en étudier les implications et, en conséquence, d'explorer diverses possibilités d'approches relativement à l'apprentissage de concepts spatiaux. Dans la présente réalisation, nous nous sommes servis de la notion de groupement en tant que structure pouvant guider notre façon d'intervenir (stratégie d'enseignement).

Dans les suites à donner à cette unité, il serait cependant bon d'en élaborer une approche plus subtile, à savoir celle d'utiliser le groupement en tant que stratégie d'apprentissage pour l'enfant.

La problématique inhérente à la communication de concepts spatiaux nous a amenés dans la présente unité, à explorer les possibilités de réalisation d'un matériel concret (blocs) ainsi que sa représentation sur diapositives. Ces concrétisations semblent répondre aussi bien aux besoins des enfants (manipulation-visualisation) qu'aux besoins des enseignants (praticabilité-accessibilité).

Les contraintes de la réalité scolaire, dont les principales composantes sont les enfants, les enseignants et les programmes, nous ont forcés à faire un compromis entre une incursion libre dans le domaine conceptuel respectant en cela les capacités et le rythme des enfants et, une présentation doublée d'un contenu bien circonscrit mettant plutôt l'apprenant en situation de "récepteur". Ce compromis, quoiqu'il nous rende passablement mal à l'aise à l'égard de certains principes didactiques, semble bien approprié surtout en ce qui concerne les attentes des praticiens de l'enseignement.

L'unité d'enseignement ainsi réalisée ne constitue qu'une toute prem ère approche à une multiplicité d'aspects auxquels il faudrait éventuellemnet faire face dans le domaine de la recherche en enseignement. Quant au "contenu enseigné", l'unité ne présente qu'une introduction globale au contexte conceptuel. A cause des contraintes imposées par la praticabilité et, il faut

l'avouer, à cause de notre peu d'expérience dans le contexte des problèmes impliqués, cette unité n'introduit aux concepts que par une voie empirique de discrimination, négligeant presque totalement les aspects des processus dynamiques du développement de la représentation spatiale et de la formation de concepts dans lesquels, nous semble-t-il, la notion de groupement, jouerait un rôle encore plus important que cela n'a été mis en évidence jusqu'à présent. Les activités de discrimination qui dominent la présente unité visent essentiellement à circonscrire l'extension d'un concept en distinguant entre "membre" et "non-membre' d'une classe de représentants. De telles activités négligent l'exploitation des variabilités possibles à l'intérieur d'une classe des représentants, c'est-à-dire, elles négligent la teneur intensive du concept (Martin, J.L., 1976, p. 28). Cette teneur est mise en évidence par la considération d'actions ou d'opérations que l'on peut effectuer sur un représentant et qui laissent invariante sa propriété de représentant. De telles considérations pouvant être perçues en tant qu'approfondissements naturels d'activités de discrimination constitueront donc un enchaînement organique important à donner à la présente unité d'enseignement. Dans le domaine de la recherche en enseignement les suites du présent diaporama devront donc tenir davantage compte de l'intensité des concepts afin de compléter l'aspect de leur extension. Ainsi la réalisation de telles suites devra-t-elle s'appuyer davantage sur des opérations (concrètes ou mentales) que l'on peut effectuer sur certains types de polyèdres ainsi que sur les propriétés compatibles (Wittmann, E. 1976, page 169) avec ces opérations. Il s'avère que le principe opératoire et, par conséquent, la notion de

groupement, y seraient de pertinence primordiale.

Afin que ces travaux ultérieurs puissent tenir compte des capacités et des conceptions particulières des enfants, il serait important pour nous d'élargir le domaine de nos connaissances en ce qui a trait au processus de développement de la représentation spatiale chez l'enfant. Pour cela, il devient nécessaire d'obtenir des indications concrètes précises en ce qui a trait aux structurations (aussi fragmentaires qu'elles puissent être) et aux propriétés des blocs que les enfants conçoivent et développent spontanément à partir de la situation Polyèdres. La présente unité ne nous fournit peut-être pas encore suffisamment de renseignements précis à cet égard quoiqu'elle nous donne de multiples indications pour des travaux de recherche en apprentissage lesquels contribueraient à clarifier ce domaine. Ci-après, nous en signalerons quelques unes que nous aimerions approfondir dans des recherches subséquentes. Elles sont tirées tant des observations générales que des résultats des questionnaires exploités lors de l'expérimentation de la présente unité. Nous regrouperons ces indications d'après les activités (spontanées ou stimulées) des enfants qui les ont fait surgir.

a.- Activités de comptage de faces, d'arêtes, de sommets

Une telle activité, aussi banale qu'elle puisse paraître à première vue, peut nous révéler beaucoup sur la conception structurale d'un polyèdre par l'enfant. Ainsi l'observation du processus de comptage des faces

d'un hexaèdre de type (6, 8, 12) nous a-t-elle révélé la conception de ce bloc en tant que triplet de paires de faces opposées par la seule manière dont l'enfant manipulait le bloc durant le comptage. Des observations analogues ont été faites en regard des polyèdres-prismes et des polyèdres-pyramides. Une conception structurale d'un polyèdre peut aussi se manifester par un comptage systématique, sécure et non répétitif. Quelles sont les structurations que les enfants perçoivent plus ou moins spontanément? Quels sont les polyèdres dont les enfants conçoivent le plus facilement les structures? Comment ces conceptions se développent-elles en fonction de l'âge et de l'expérience des enfants? L'étude de telles questions pourrait nous fournir des indications précieuses concernant le développement de la teneur intensive d'un concept en nous révélant la conception de la structure interne d'un polyèdre par l'enfant.

b.- Activités de description de blocs

Observant un bloc donné, les enfants sont amenés à le décrire par allusion à des objets de leur environnement auquels le bloc leur fait penser. Cet exercice nous indique quelles propriétés du bloc sont intuitivement conçues par l'enfant et le plus visiblement réalisées dans l'objet en question. De plus, lorsque l'enfant varie ses appellations d'après la position qu'il donne à l'objet, cela nous laisse soupçonner, en plus des diverses conceptions possibles qu'il a du bloc, un indice du développement de sa conception abstraite de la forme de l'objet. Quelles sont les propriétés intuitivement conçues par l'enfant en fonction de l'objet

concret? Quelle est l'ampleur de la variation de conceptions pour un objet donné? Il va sans dire que l'étude de questions comme celles-là pourrait influencer grandement les interventions didactiques dans l'enseignement de la géométrie.

c.- Séparation de collections de blocs

Mis en face d'une collection aussi variée de blocs polyèdres, les enfants sont spontanément amenés à en considérer des exemplaires individuels ou des sous-collections d'exemplaires reconnus comme "appartenant ensemble" ou comme étant parents entre eux. C'est ainsi que, dans l'expérimentation de l'unité, beaucoup d'enfants ont formé spontanément la sous-collection de blocs qui "ressemblent à des boules" en isolant des polyèdres semi-réguliers du reste des polyèdres. Cela peut être interprété comme une conception intuitive de la propriété qu'ont les polyèdres semi-réguliers d'être inscriptibles dans une sphère. Cependant, comme nous l'avons dit au point sept, ce germe étant encore intuitif et vague, les enfants n'incluent jamais ni le cube ni le tétraèdre régulier dans cette collection. De telles activités peuvent nous fournir des renseignements supplémentaires concernant les propriétés de polyèdres intuivement conçues par les enfants. De plus, lorsque nous considérons les blocs polyèdres omis dans les collections formées par les enfants, nous sommes déjà en présence de nouvelles informations quant à la précision de leurs conceptions. D'où les questions qui ressortent naturellement: quelles sont les propriétés les plus intuivement concevables par

les enfants dans la collection donnée de blocs polyèdres? Comment, dans les divers cas, décrire la précision des conceptions des enfants? Ces conceptions ou leurs précisions varient-elles avec l'âge des enfants? La pertinence de telles investigations pour la rationalisation et l'adaptation des interventions didactiques n'est plus à démontrer.

d.- Comparaison de deux blocs

Une activité intéressante, quoique moins spontanée, est celle de la comparaison de deux blocs et de l'énumération des ressemblances et des différences. Cette activité nous fournit, elle aussi, plusieurs indications sur les propriétés les plus facilement reconnaissables par l'enfant mais avec cette particularisation que, cette fois-ci, elles sont classifiables en propriétés variables (différences) et en propriétés invariantes (ressemblances). Quelles sont les propriétés qui sont le plus facilement perçues comme variables? Y en a-t-il qui sont davantage reconnues comme invariantes? Dans cette conception des propriétés, peut-on découvrir des constances en fonction de l'âge des enfants? Les précisions émanant de telles études pourraient être précieuses dans la construction de futures unités d'enseignement qui chercheraient à favoriser aussi bien la teneur intensive que la teneur extensive d'un concept.

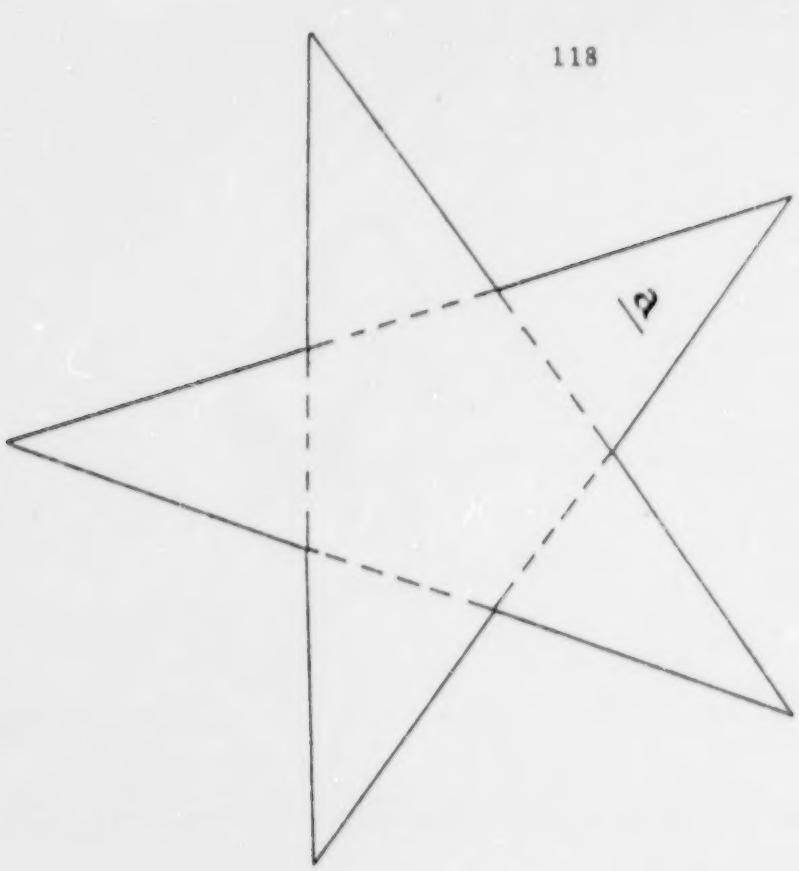
e.- Reproductions et reconnaissance de reproductions de blocs

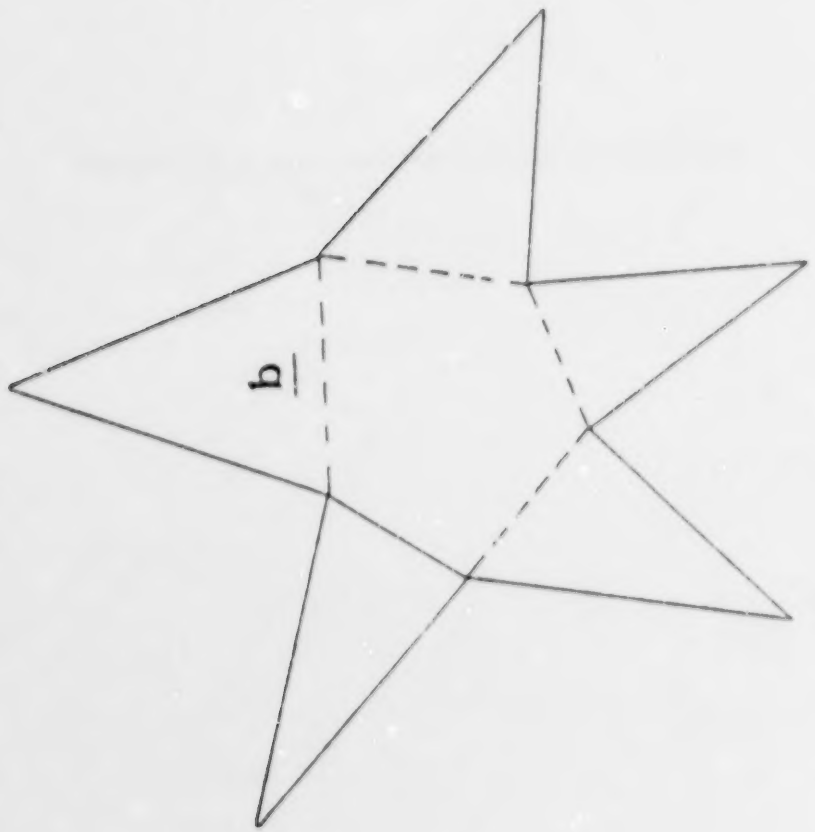
Lors des séances d'expérimentation de l'unité d'enseignement, nous avons remarqué que les enfants sont fortement attirés par la tâche de reproduire des blocs par dessin. Lorsque les enfants sont laissés libres de reproduire tel ou tel bloc de leur choix, nous dépistons aisément le ou les blocs que les enfants estiment les plus intéressants ou les plus faciles à reproduire. Et, une fois de plus, nous pouvons vérifier quelles sont les propriétés que les enfants estiment importantes ou caractéristiques dans ces blocs. Cependant, selon la sorte de reproduction qu'on leur propose (dessin, modèle en squelette, copie en plasticine, etc.), l'expression des enfants sera plus ou moins obscurcie par des difficultés techniques ou par des conventions qui ne leur sont pas familières. Pour enrayer de tels obstacles, il serait bon de faire des expériences portant sur la reconnaissance de blocs dans des reproductions variées. Ces reproductions réalisées par l'expérimentateur peuvent mettre en évidence certaines propriétés d'un bloc pour en négliger d'autres. Quelles sont les propriétés négligées par tel type de reproductions laissant pourtant possible l'identification de l'objet en question? Puisque les reproductions dessinées semblent susciter un intérêt particulier, à partir de quels types de dessins les enfants reconnaissent-ils le plus facilement un objet donné? Voilà encore des études pertinentes à réaliser en vue d'une adaptation et d'une rationalisation accrue d'une unité d'enseignement autour du sujet Polyèdre.

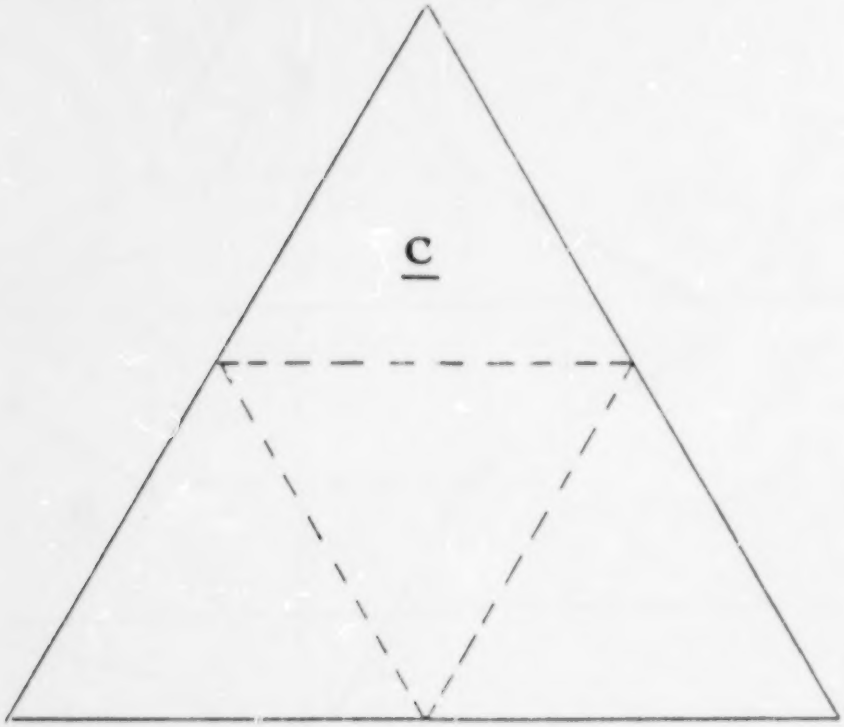
Ainsi, la présente unité d'enseignement ouvre-t-elle sur une multitude de pistes de recherche visant à compléter et à poursuivre naturellement un processus d'apprentissage amorcé et stimulé par la dite unité. Cette multitude de pistes - l'énumération qui en est faite ici n'est certainement pas complète - illustre bien la complexité du domaine de la recherche en enseignement et justifie, à notre avis, une méthodologie à caractère de développement tel qu'indiqué dans le processus de la rationalisation des interventions didactiques. De plus, cette multitude de débouchés marque clairement les interrelations entre les divers domaines de recherche en didactique de la mathématique tel qu'illustré dans le réseau de recherche conçu par le Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques (GCEDM) (Kieren, T. 1978). L'exemplification de ce réseau de relations, l'indication et la précision de pistes de recherche aussi bien en enseignement qu'en apprentissage et, par conséquent, le développement progressif de la conception de la didactique de la mathématique, voilà qui constitue à part la réalisation concrète de l'unité d'enseignement Polyèdres, le résultat majeur de cette recherche en enseignement.

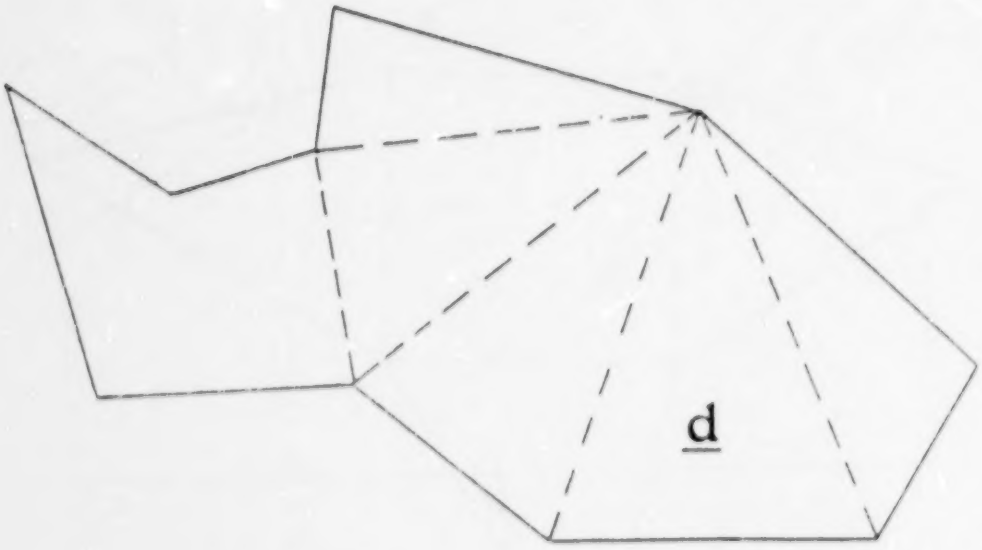
ANNEXE 1

Développés planaires des blocs Polyèdres

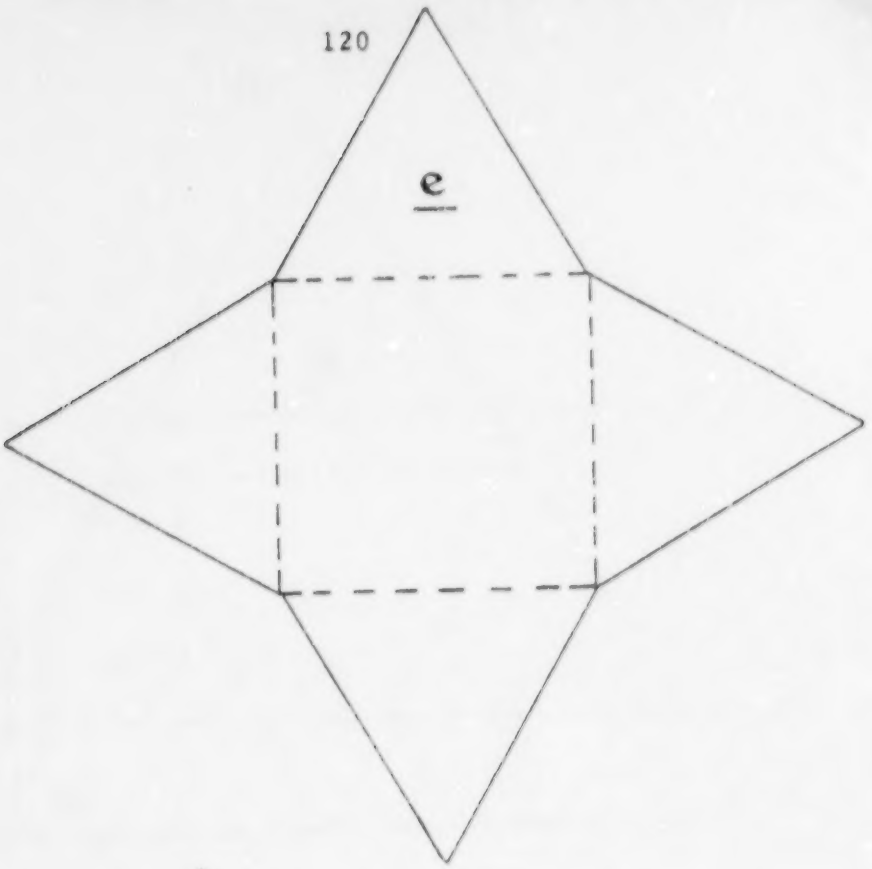

a


b

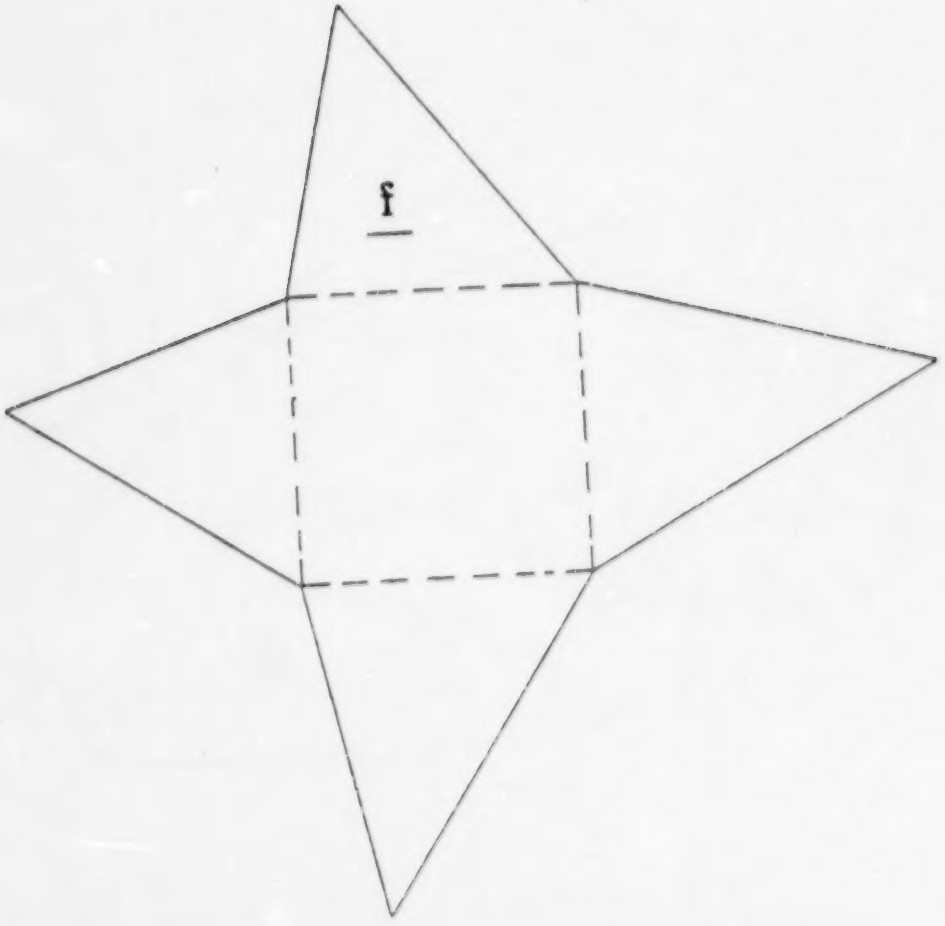

c

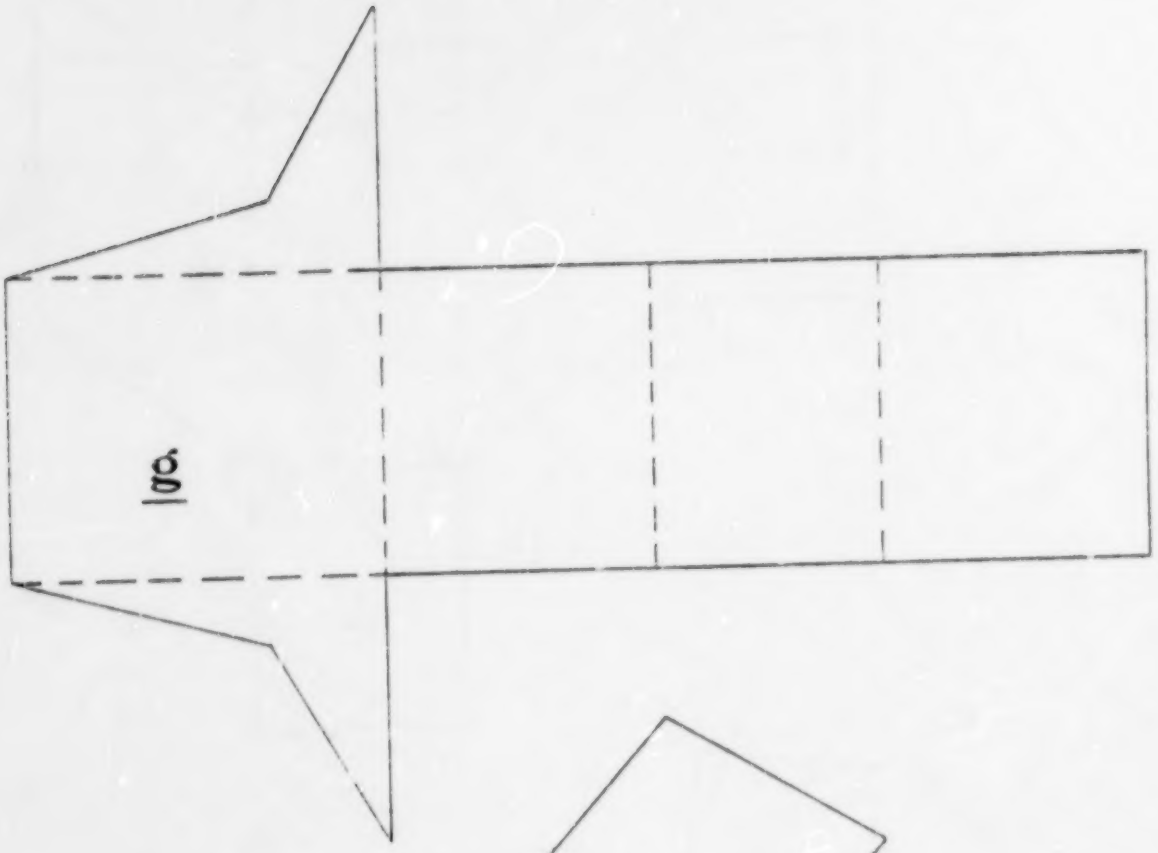

d

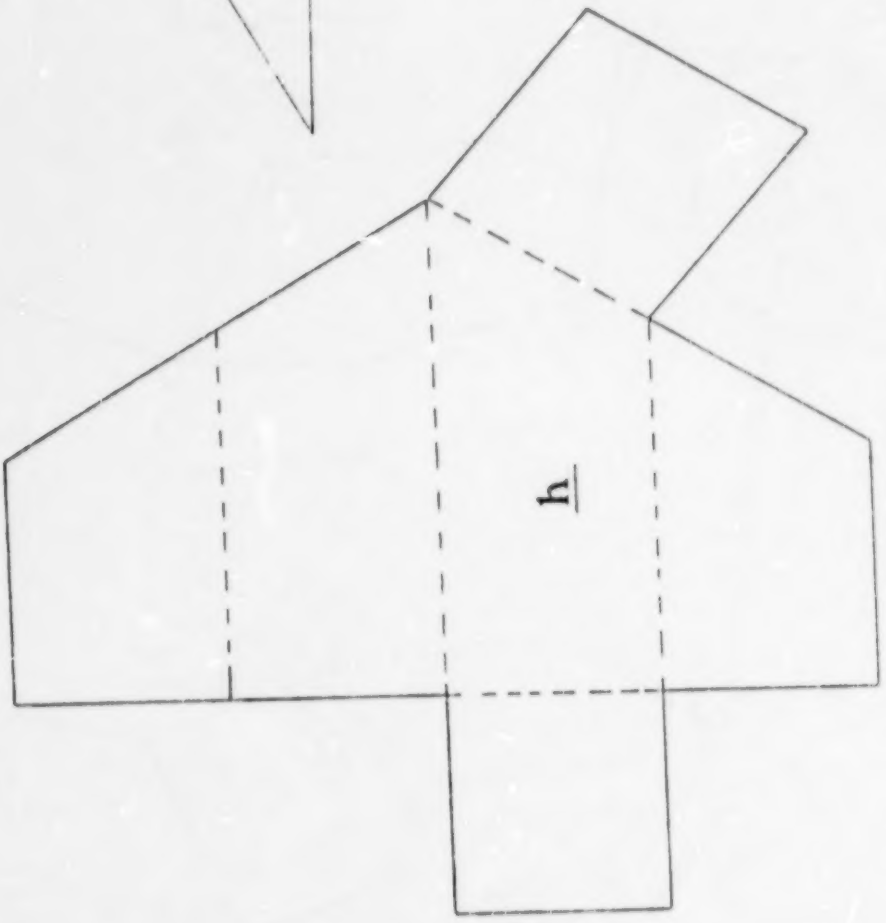
e

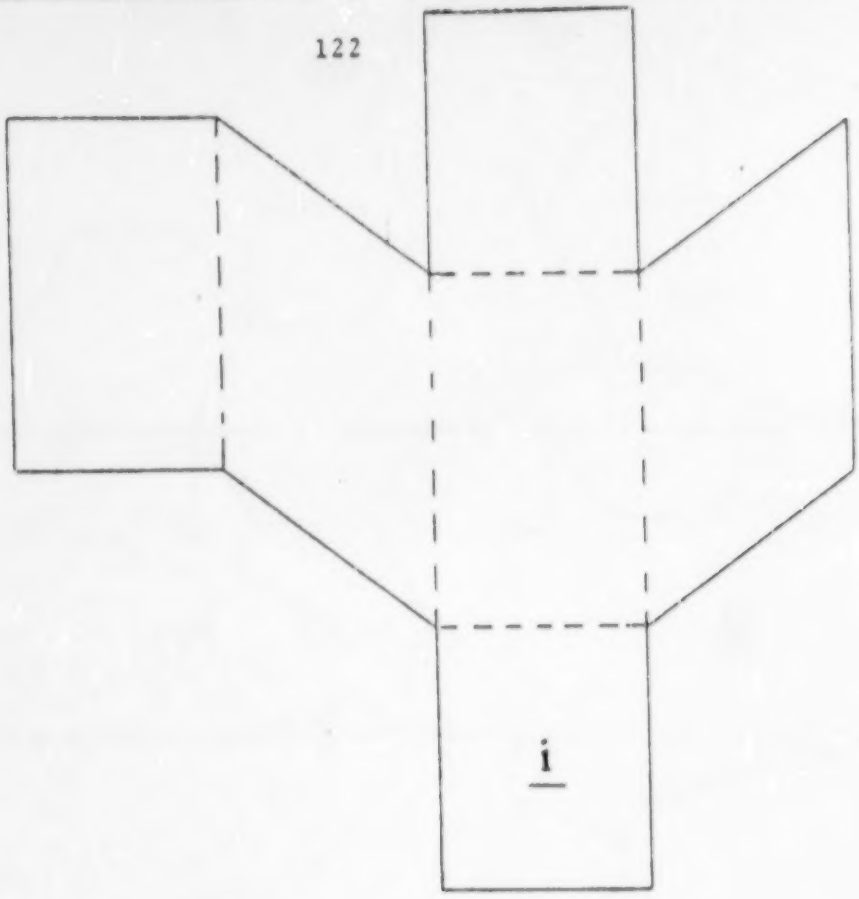


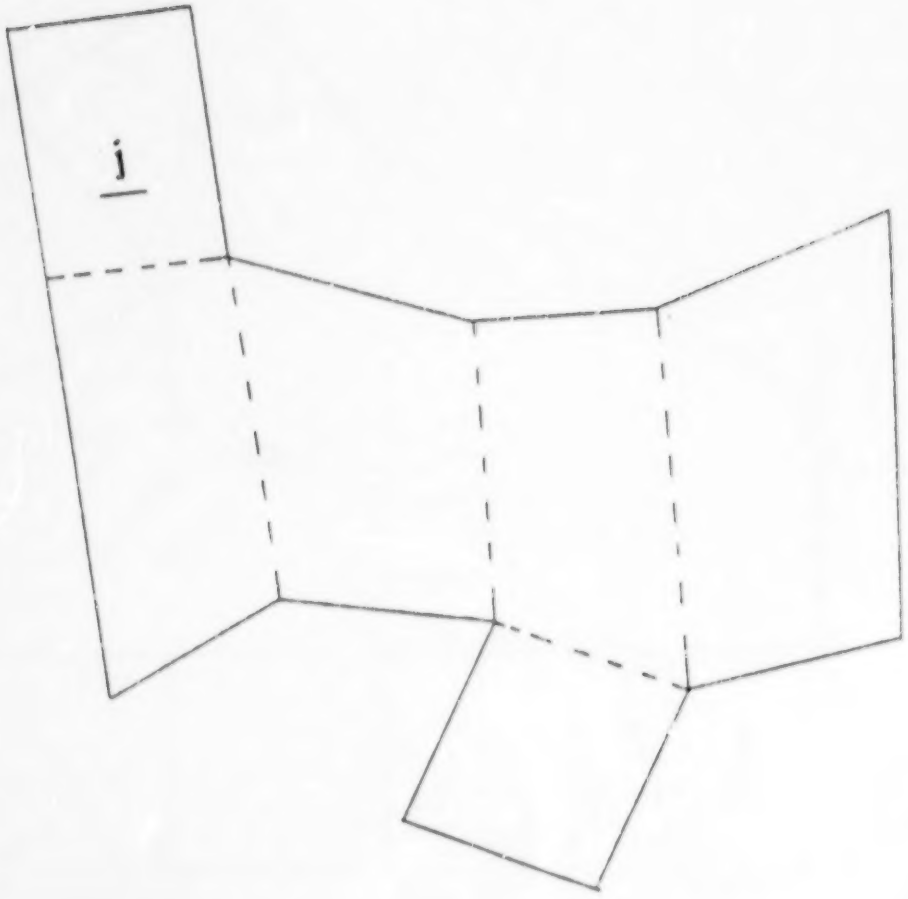
f

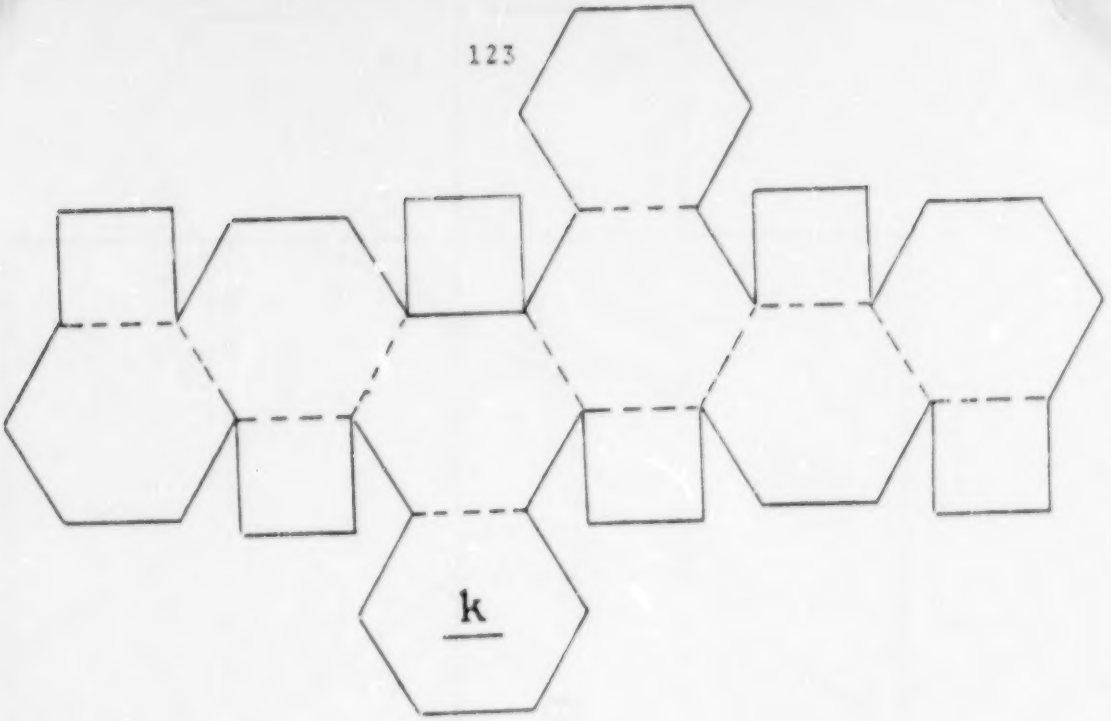



Ig.

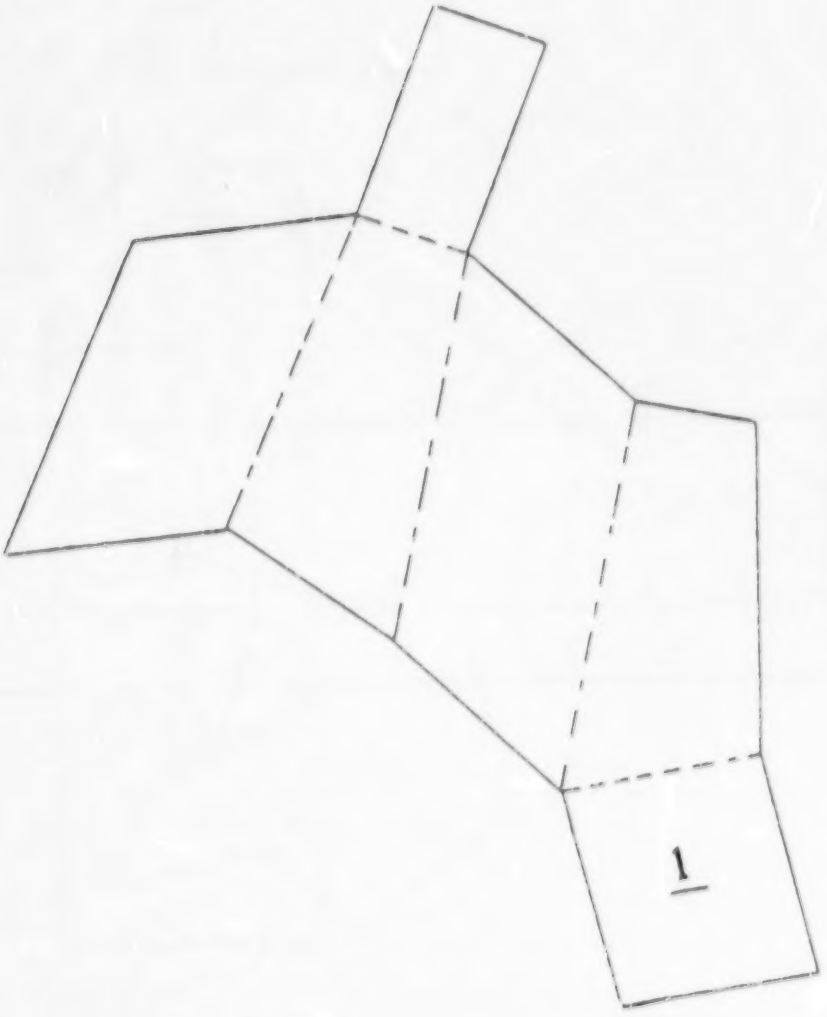

h


i

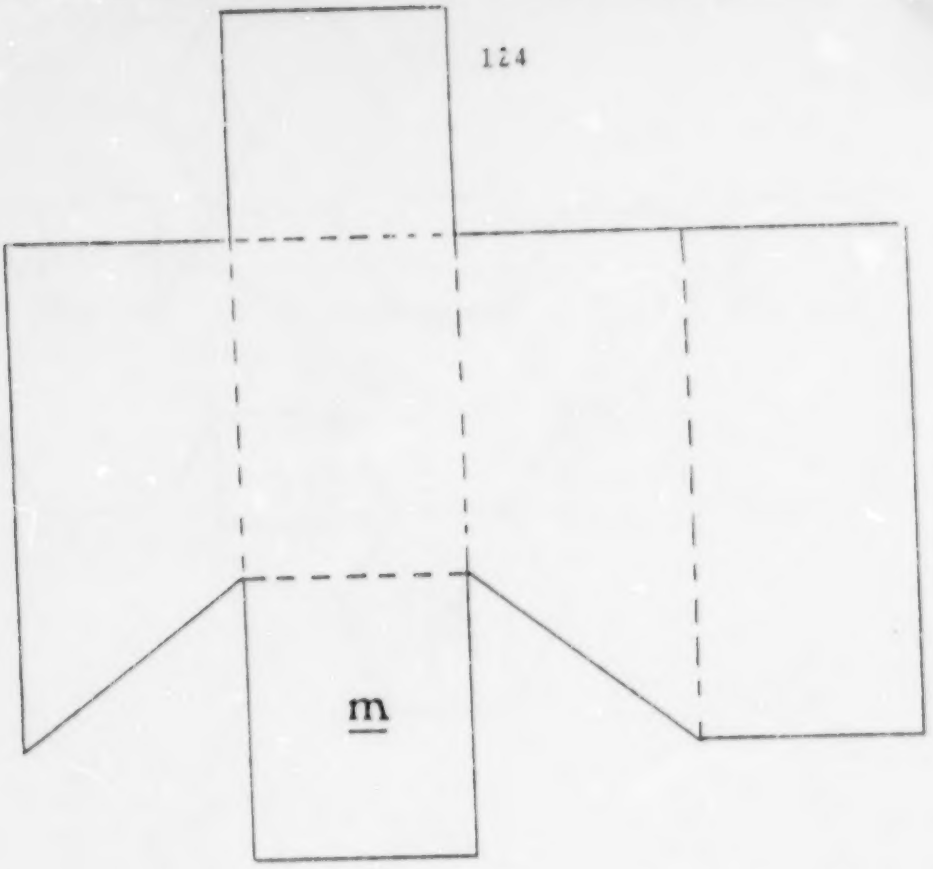

j



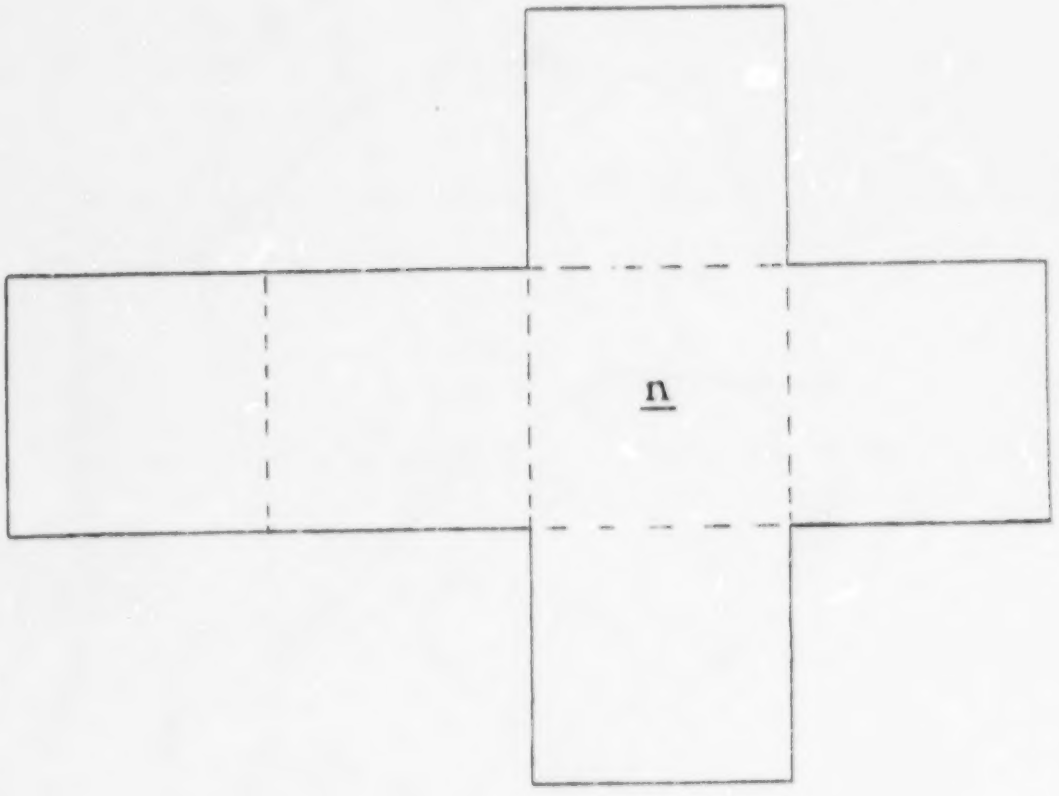
k



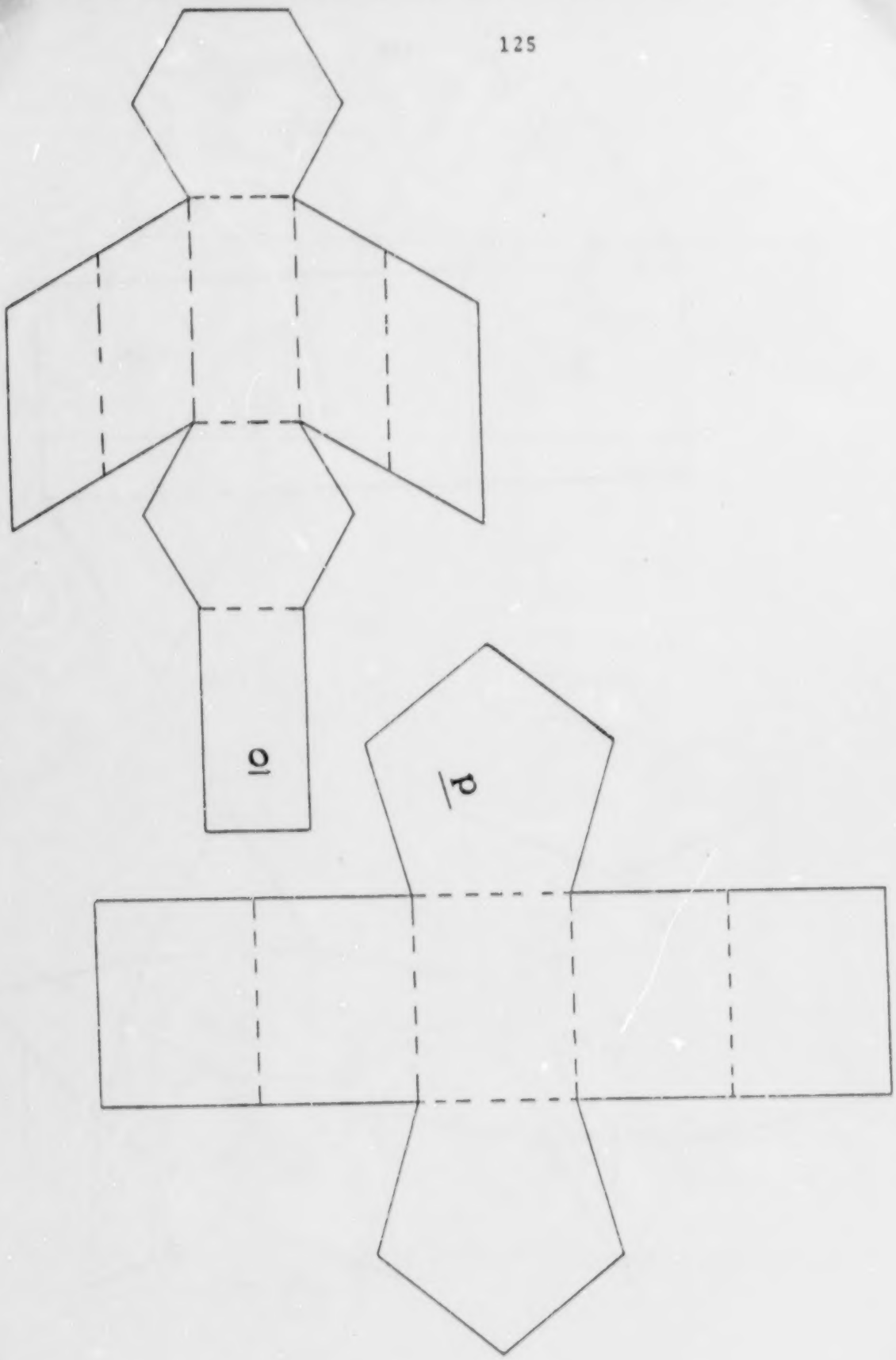
l

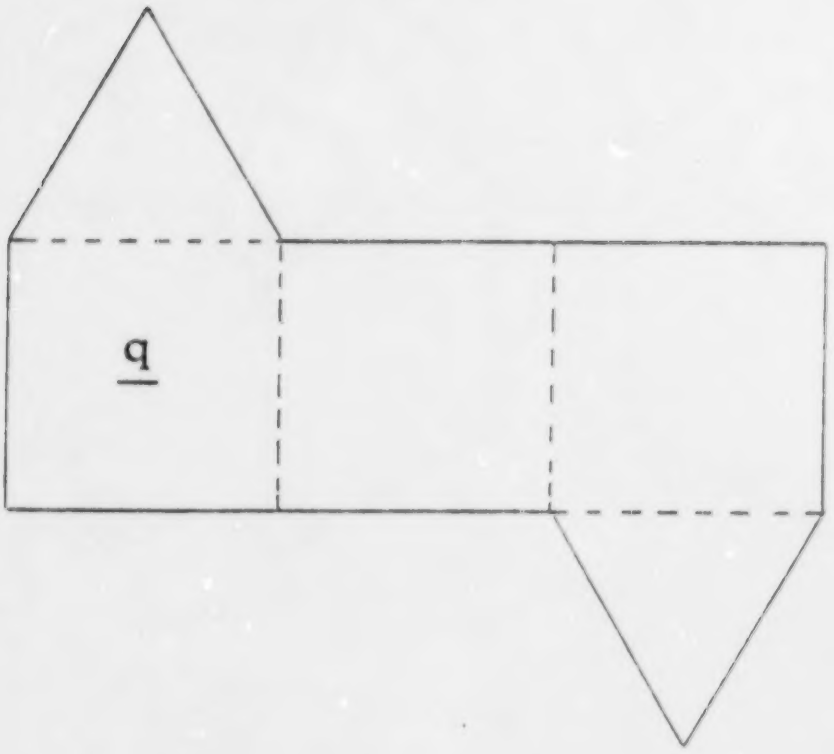


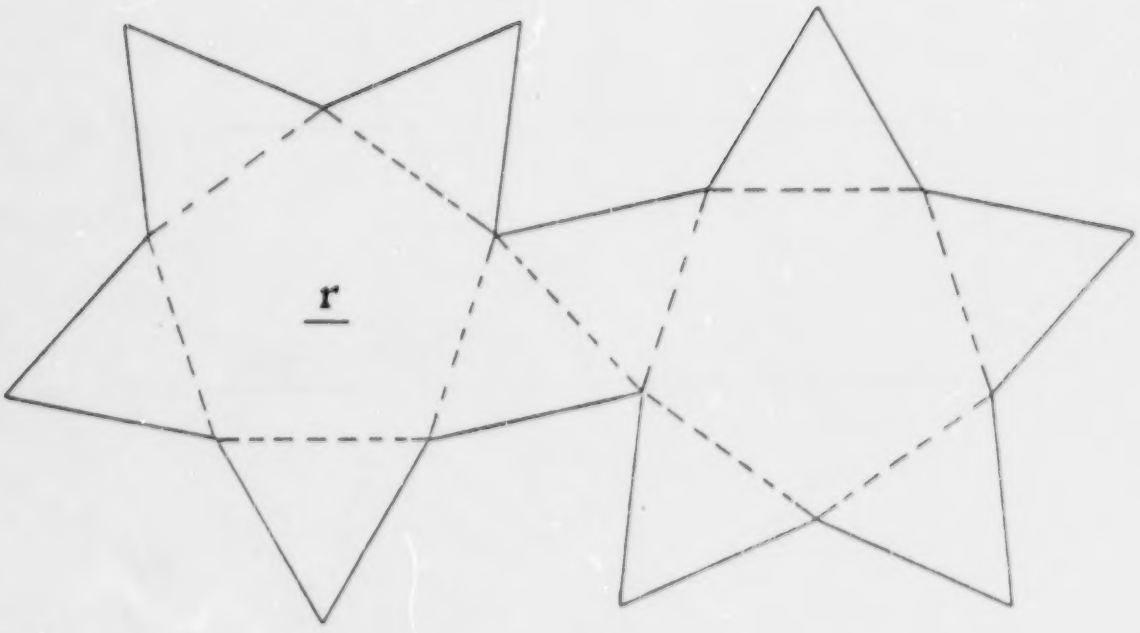
m

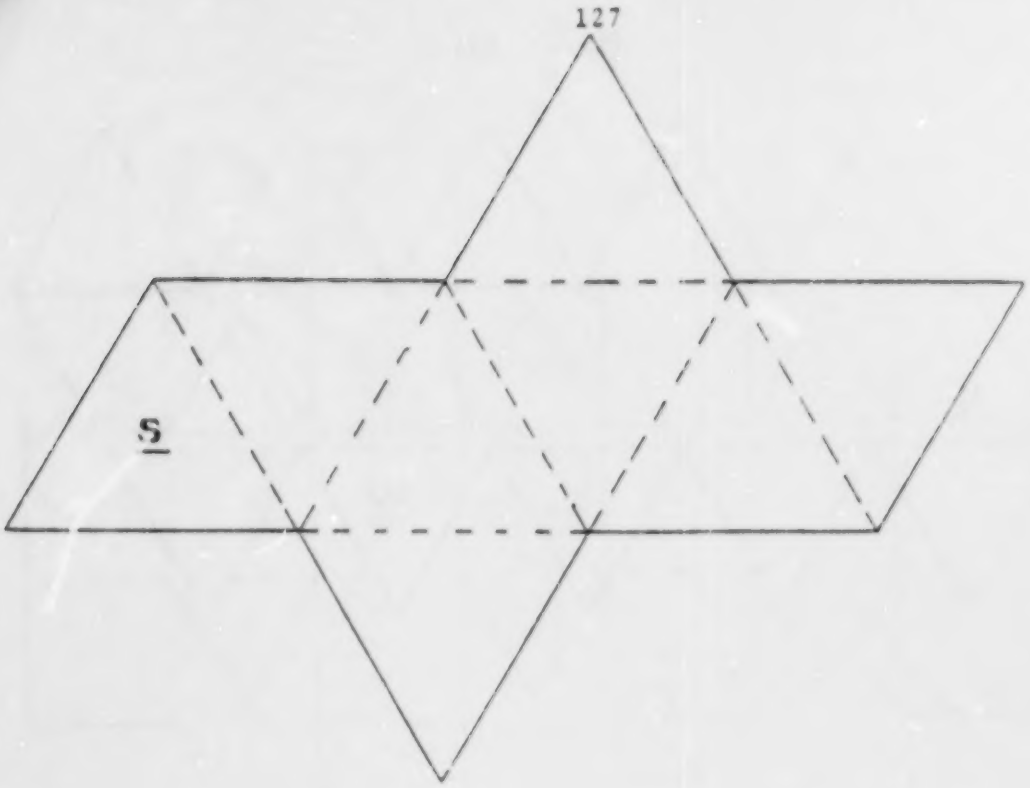


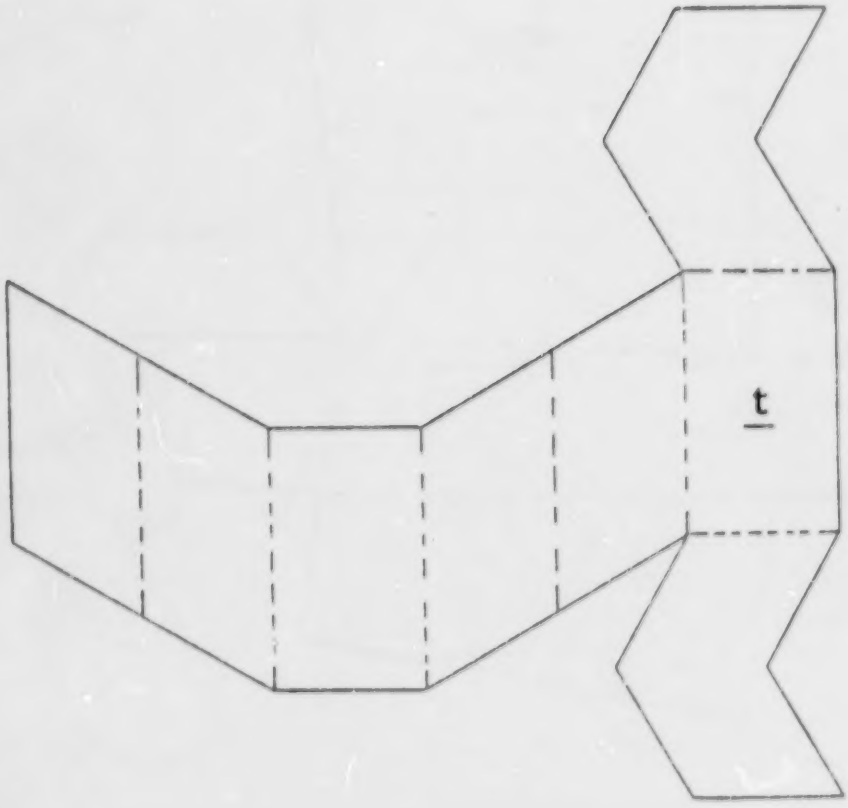
n

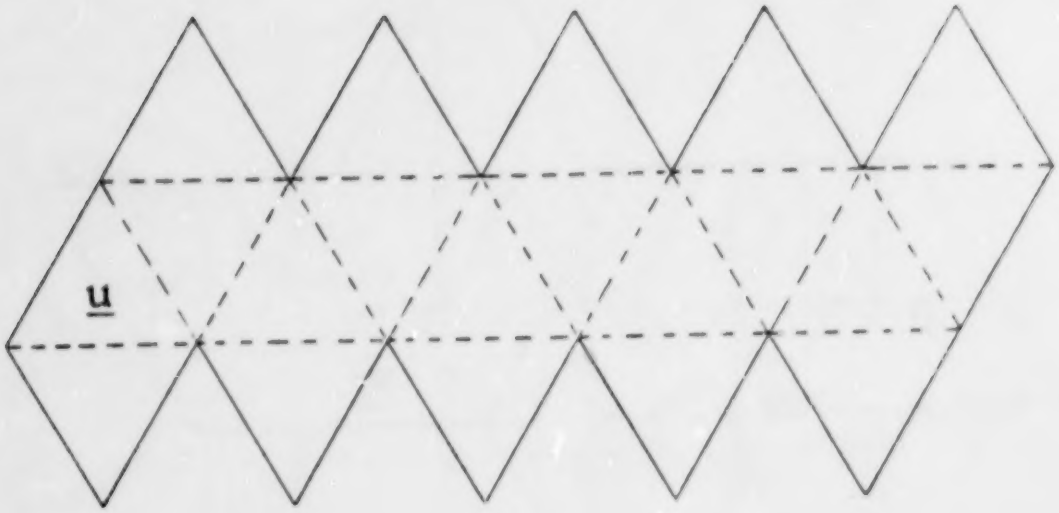

o
p

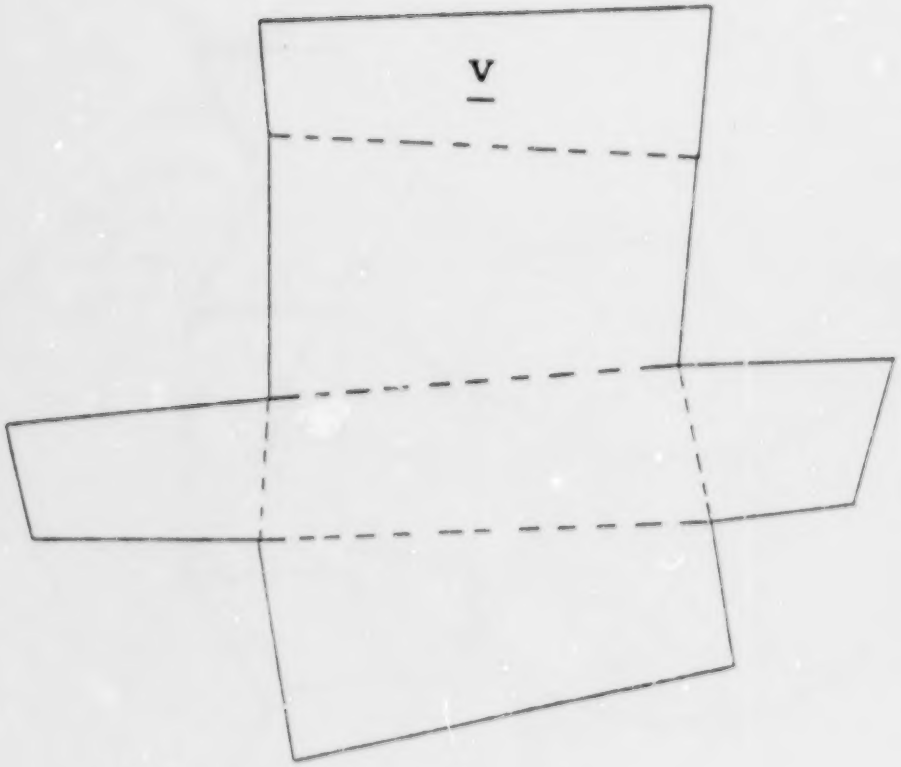

q

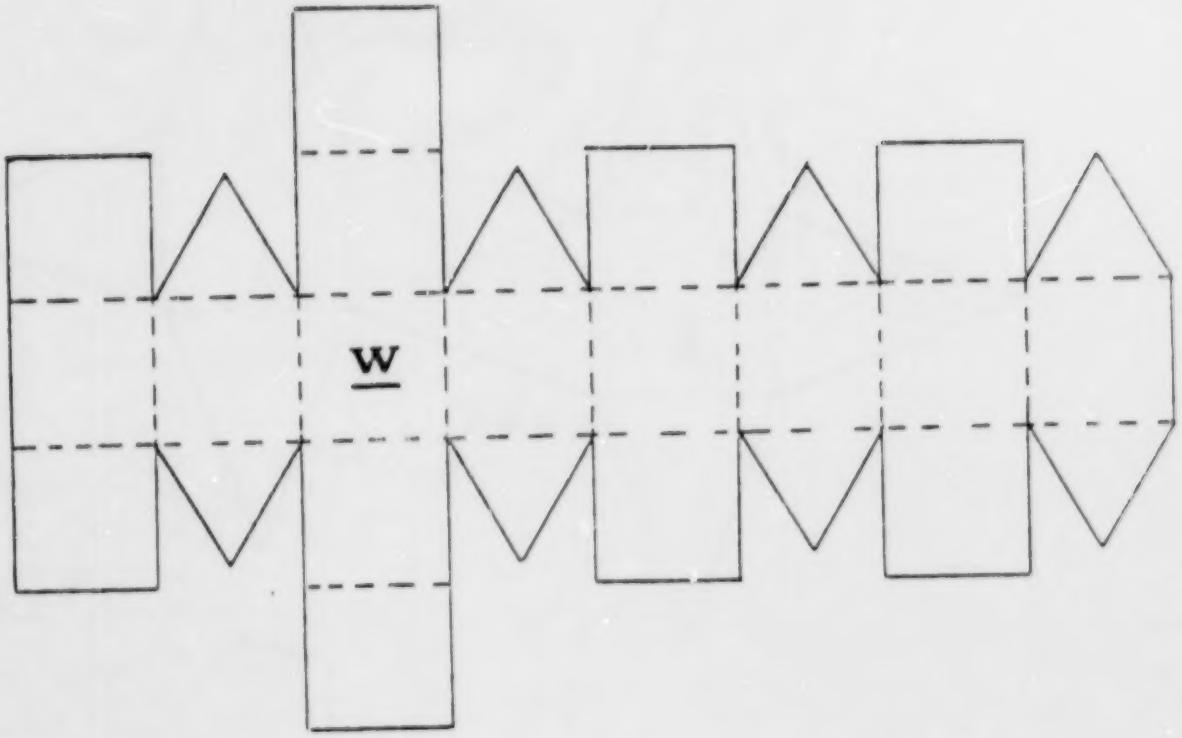

r

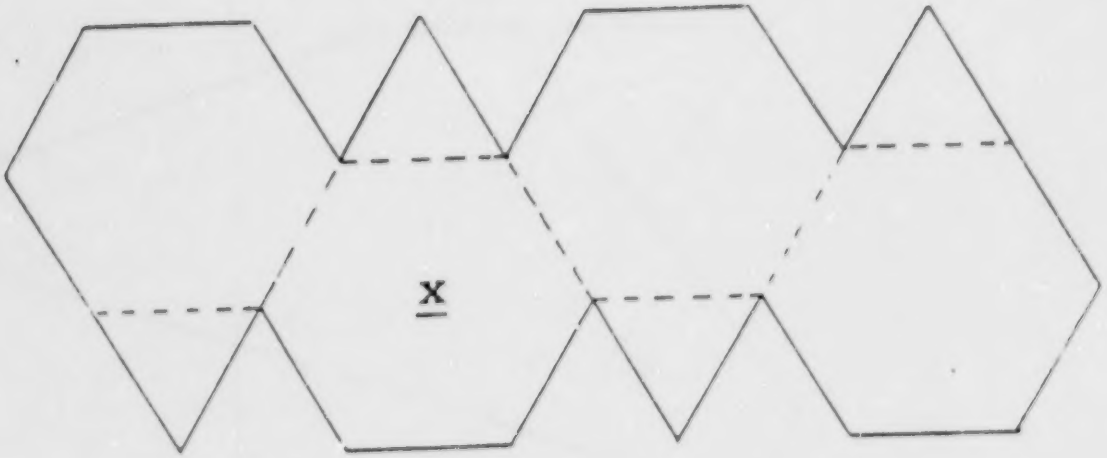

S

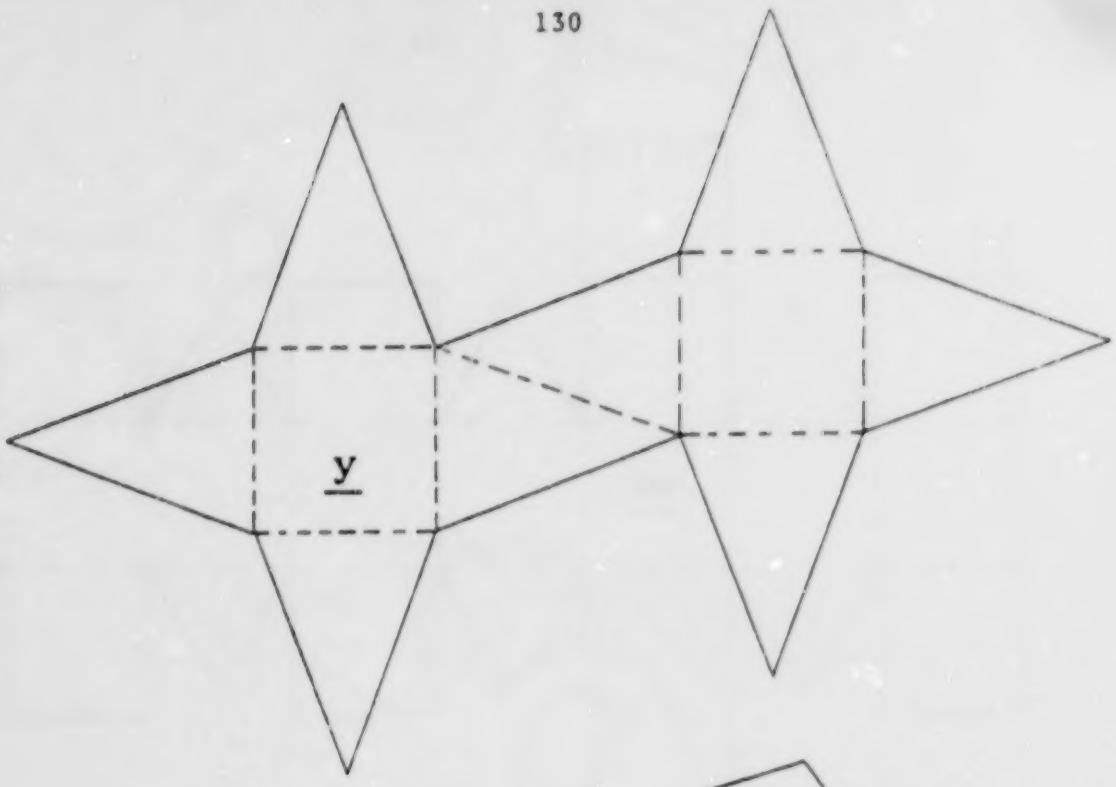

t

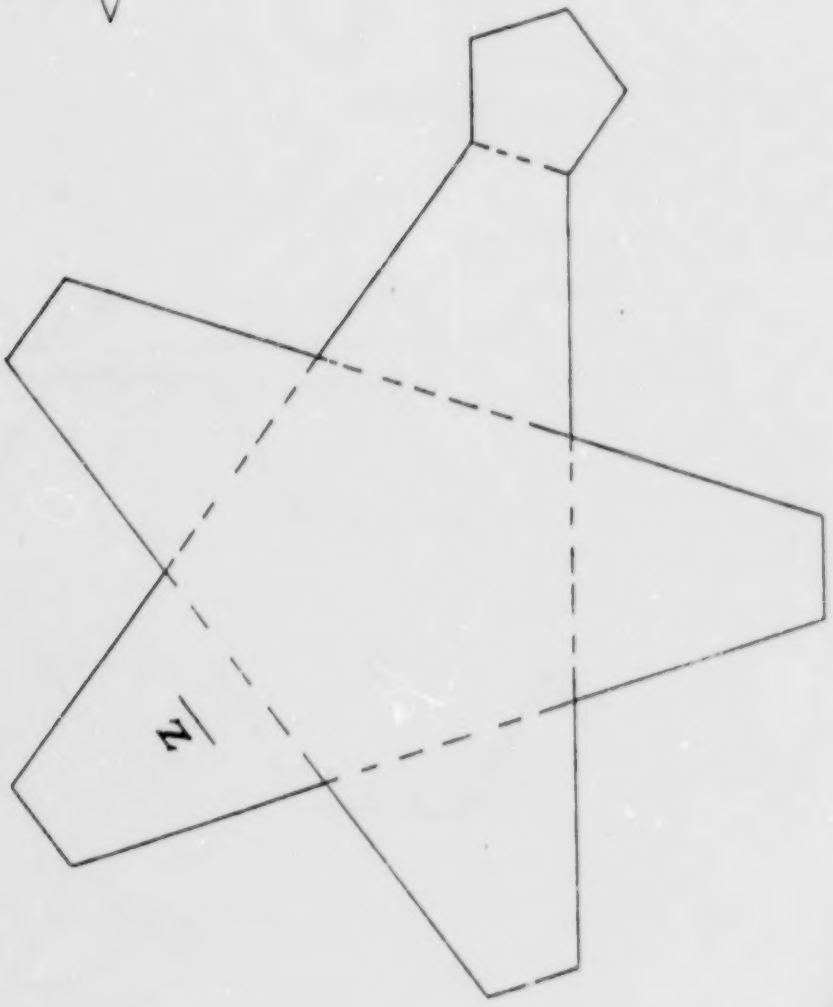

u


v


W


X


y


z

ANNEXE 2

Appellations variées
utilisées par les enfants
pour décrire les blocs

Appellations	Blocs	Pourcentage (%) de reconnaissance
chaise longue	G,T	80
tente	Q,A,K	74
tambour	Y,R,P,K	72
cabane d'oiseaux	P	58
ballon	W,K	58
diamant	S,U,K,W,N	48
boîte	N,H,M	30
pont couvert	T	30
tabouret (cirque)	Z,U,R	30
gomme à effacer	M,I	28
niche	P,T,Q	28
toit de maison	P,E,C	26
dé	N	20
tombe	V	18
cheminée	M	16
abat-jour	Z	12
cornet	A	12
alvéole	O	10
grattoir	M	10
garage	T,U	10
toupie	S	10
tunnel	T	10
rondelle	R	10
cage à homard	O	10
lumière (disco)	W	8
mine de crayon	A	8
jupe	Z	8
bec de canard	G	8
volcan	Z	8
wigwam	A	8
fromage	V	2

Appellations diverses données aux blocs
(questionnaire A: question 1)

Appellations	Blocs	Pourcentage (%) de reconnaissance
tambour	Y,R	92
tente	Q,A,L	76
chaise longue	G,T,Q	66
tabouret (banc)	G,Y,R,Z	64
toit de maison	G,Q,N,P,T,E	54
ballon	W,K,S	48
cabane d'oiseaux	P	42
niche	P,T,Q	34
diamant	W,U,S,K	30
boîte	N,M	26
gomme à effacer	I,N	22
pont couvert	T	16
toupie	S	16
cheminée	M,H,V,I	16
alvéole	O	12
abat-jour	Z,S	10
clé	N	10
garage	T,X	8
jupe	Z	8
tam-tam	R	8
tombe	V	6
flèche	C,A	6
mine de crayon	B,F	6
glissade	M,L	6
canne	O	4
bombe	W	4
reflet de pyramide dans l'eau	S	4
tuyau	O	4
cage à homard	O	4
caisse	Y,R	4
fromage	V	2

moteur	O	2
Wagon	N	2
chapeau	C	2
rocher	Y	2
grue	G	2
montagne	Z	2
tunnel	T	2
perle	U	2
balançoire	I	2
météorite	W	2
couloir	O	2
grattoir	M	2
cornet	Q	2
charrue	H	2
voiture	M	2

Appellations diverses données aux blocs
(questionnaire B: question 1)

ANNEXE 3

Questionnaires A et B

QUESTIONNAIRE A

Voici un ensemble de blocs construits en carton et identifiés par les lettres de l'alphabet.

Pour te familiariser avec cet ensemble de blocs, réponds aux questions qui suivent.

QUESTION I

Observe tous tes blocs. Parmi eux, y en a-t-il qui te font penser à des objets connus? Saurais-tu leur donner un nom?

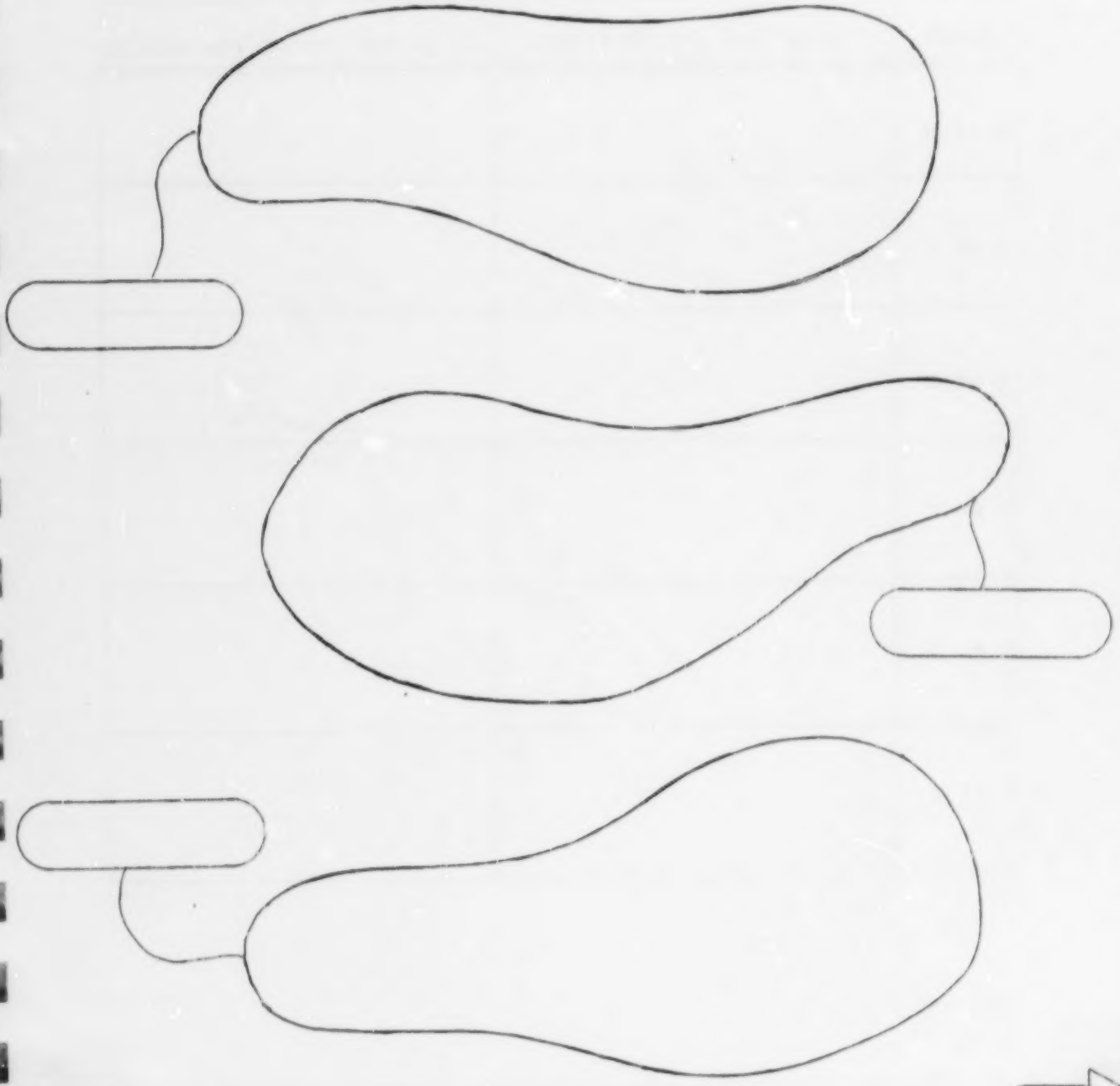
NOM	LETTRE DU BLOC

© Section Enseignement, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke

QUESTION II

Mets ensemble les blocs qui te paraissent se ressembler.

Ecris leur lettre dans une patate et, dans l'étiquette, écris pourquoi ces blocs vont ensemble.



© Section Enseignement, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke

QUESTION III

Prends les blocs que nous te suggérons et trouve ce qu'ils ont de pareil puis ce qu'ils ont de différent.

BLOCS	CE QU'ILS ONT DE PAREIL	CE QU'ILS ONT DE PAS PAREIL
B et D		
D et T		
C et S		
N et I		
E et A		
F et E		

© Section Enseignement, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke

QUESTION IV

Si tu en as le goût, fais le dessin de quelques blocs de ton choix.

© Section Enseignement, Département de mathématiques, Université de Sherbrooke

QUESTIONNAIRE B

Voici un ensemble de blocs construits en carton et identifiés par les lettres de l'alphabet.

Pour te familiariser avec cet ensemble de blocs, réponds aux questions qui suivent.

QUESTION I: Discrimination globale

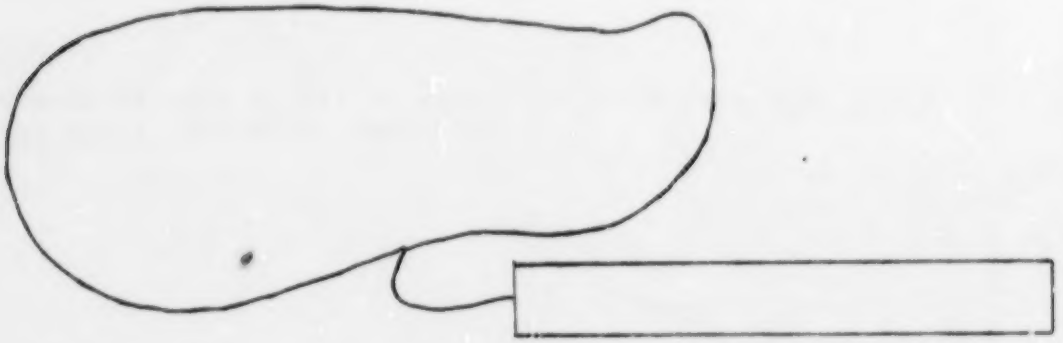
Observe tous tes blocs. Parmi eux, y en a-t-il qui te font penser à des objets connus? Donne-leur un nom.

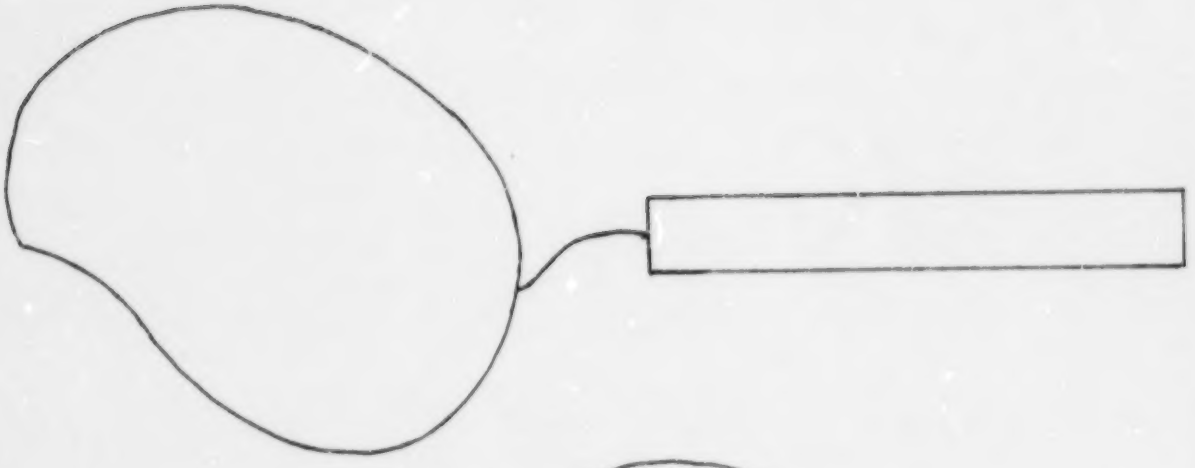
NOM	Lettre du bloc

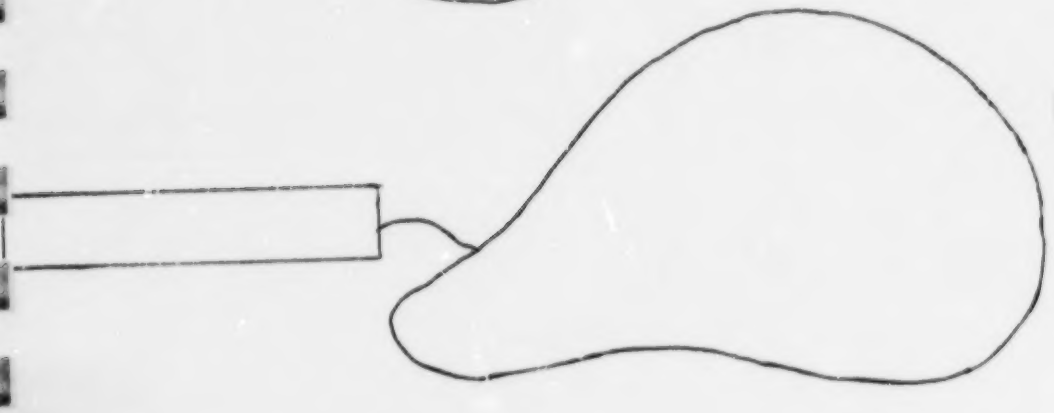
QUESTION II: Formation de sous-ensembles

Mets ensemble les blocs qui te paraissent se ressembler.

Ecris leur lettre dans une patate et, dans l'étiquette, écris pourquoi ces blocs vont ensemble.







Fais autant d'ensembles que tu peux.

QUESTION III:

Y a-t-il des blocs que tu ne connais pas du tout? Si oui, inscris la lettre de ces blocs dans l'espace ci-après:

QUESTION IV:

Essaie de trouver une ou plusieurs propriétés communes à tous ces blocs que tu as devant toi.

QUESTION V: Comparaison de deux blocs à la fois

Dans le tableau qui suit, considère les blocs que nous te présentons et trouve ce qu'ils ont de pareil et ce qu'ils ont de différent.

BLOCS	CE QU'ILS ONT DE PAREIL	CE QU'ILS ONT DE PAS PAREIL
B et D		
G et N		
P et T		
A et F		
A et P		
P et H		
F et H		
N et C		
O et P		

QUESTION VI:

Si tu en as le goût, fais le dessin de quelques blocs de ton choix.

BIBLIOGRAPHIE

Aubin, L. et Jutras, J.,(1979), Elaboration de groupements logiques d'inclusion et de groupements logiques des classes d'une partition dans un ensemble d'hexagones, Mémoire de maîtrise inédit, Université de Sherbrooke, septembre 1979.

Bringuier, J.C.,(1976), Conversations libres avec Jean Piaget, Editions Robert Lafond,Paris, France 1976.

Coxeter, H.S.M., (1961), Introduction to Geometry, John Wiley and Sons, New York, London, 1961.

Coxeter, H.S.M., (1973), Regular Polytopes, Dover Publications, Inc., New York, 1973.

Elliot, H.A., Maclean, J.R., Jordon, J.M., (1968), Geometry in the Classroom, New Concepts and Methods, Holt, Rinehart and Winston of Canada, 1968.

Fielker, D.S.,(1979), Strategies for Teaching Geometry to Younger Children, Educational Studies in Mathematics, 10 (1979), 85-133.

Geiser, Roland, (1979), Enquête sur l'intégration de l'audio-visuel en situation d'apprentissage, rapport final de recherche, Cegep de Saint-Jean-sur-Richelieu, Saint-Jean, Québec, 1979.

Goutard, Madelaine, (1970), Mathématique sur mesure, pédagogies pour notre temps, Hachette, Paris 6e, 1970.

Grégoire, Réginald, (1978), La télévision et les valeurs dans le projet éducatif, Gouvernement du Québec, Conseil supérieur de l'éducation, Québec, 1978.

Hilbert, D., Cohn-Vossen, S., (1956), Geometry and the Imagination, Chelsea Publishing Company, New York, 1956.

Holden, A., (1971), Shapes, Space and Symmetry, Columbia University Press, New York, London, 1971.

Holden, A., (1977), Formes, espaces et symétries, Cédic, Lyon, France, 1977.

Kieren, T., (1978), Report of the Research Group, Canadian Mathematics Education Study Group (CMESG), Groupe canadien d'étude en didactique des mathématiques, (GCEDM), Kingston, 1978.

Lemay, F.,(1979), Motivation intrinsèque, Instantanés mathématiques, Vol. XVI, no 2, novembre 1979 (6 à 9).

Lunkenbein, D.,(1977a), Didactique de la mathématique, Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, Rapport no 16, 1977.

Lunkenbein, D.,(1977b), Rationalising Teaching Interventions - A Working Model of a Process of Research in Mathematics Teaching, Educational Studies in Mathematics, 8 (1977) 271-293.

Lunkenbein, D.,(1979), Qu'est-ce que la didactique de la mathématique, Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, Rapport no 21, 1979 ou Bulletin de l'AMQ, Vol. XIX, no 2, mars 1979 (14 à 35).

Lunkenbein, D., Allard, H., Goupille C.,(1979), Rationalisation d'interventions didactiques - Recherches didactiques pour une mathématique à la portée de tous et adaptée à chacun, Conférence inédite, CIEAEM, Veszprém (Hongrie), août 1979.

Martin, J.L., (1976), A Test With Selected Topological Properties of Piaget's Hypothesis Concerning the Spatial Representation of Young Children, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. VII, no 1, 1976 (26-38).

Patenaude, P., (1969), Préparation d'un cours de mathématique suivant une pédagogie d'animation, Bulletin de l'AMQ, Vol. XI, no 4, 1969 (3 à 15).

Piaget, J., (1967), Psychologie de l'intelligence, Armand Colin, Paris, (1967).

Tahta, D.G. and Brookes, W.M., (1966) The Genesis of Mathematical Activity, in Brookes, W.M. (éditeurs) The Development of Mathematical Activity in Children: The Place of the Problem in this Development, A.T.M., 1966.

Toth, L.F., (1964), Regular Figures, Pergaman Press, London, 1964.

Wenniger, M.J., (1970), Polyhedron Models, Cambridge University Press, 1970.

Wenniger, M.J., (1975), Polyhedron Models for the Classroom, NCTM, Reston, Virginia, 1975.

Wittmann, E., (1973), The Concept of Grouping in Jean Piaget's Psychology - Formalization and Applications, Educational Studies in Mathematics, 5, 1973, 125-146.

Wittmann, E.,(1976), Eine Erweiterung des operativen Prinzips, dans H. Winter et E. Wittmann (éditeurs), Beitraege zum Mathematikunterricht, Festschrift fuer Wilhelm Oehl, Schroedel, Hannover, 1976, pages 167 à 177.

Wittmann, E.,(1978), Grundfragen des Mathematik-unterrichts, Vieweg, Braunschweig, 5. Auflage, 1978.